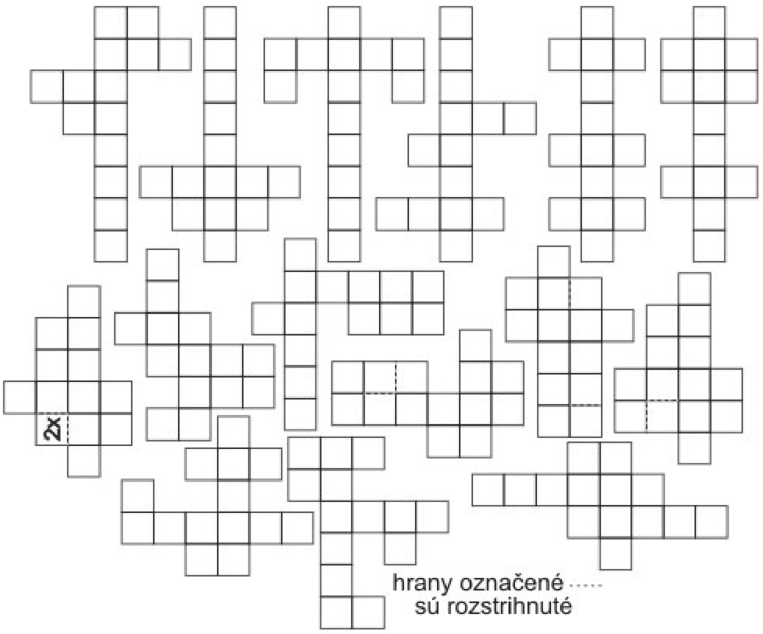
SEZAMKO 2010/2011, Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už sa nám treba s vami rozlúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku. S tými, ktorým sa darilo najviac, sa ale ešte lúčiť nemusíme, lebo sa s nimi stretneme už onedlho na sústredení vo Fačkovskom sedle.

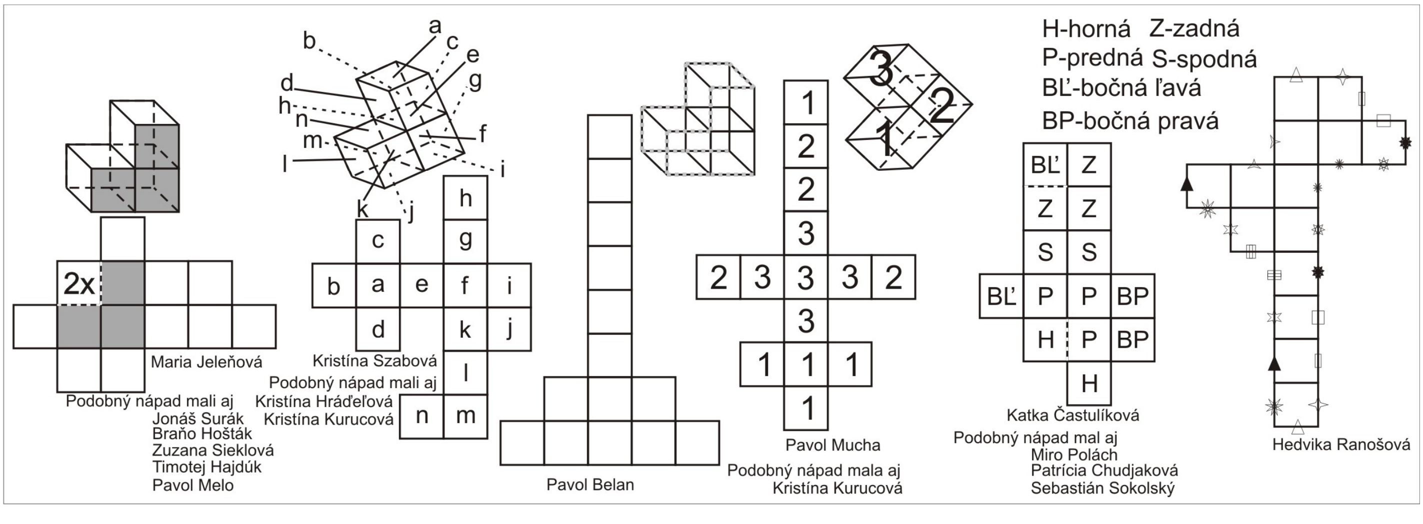
Filip, Rasťo, Olívia, Peťo, Emil a Danka vám všetkým veľmi pekne ďakujú, že ste im pomohli s toľkými matematickými problémami. V septembri k vám (ak ste nám v hlavičkách písali správnu adresu) zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia. Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentoraz. Pokiaľ ste už šiestaci a SEZAMKa budúci rok podľa pravidiel nebudete môcť riešiť, nesmúťte. Väčší brat SEZAMKa – volá sa SEZAM, na Vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste budúci rok patrili k tým najlepším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia...

Úspešný koniec školského roka a pekné prázdniny vám želajú všetci vedúci SEZAMKa!

Úloha 1 (opravovala Ika Bachratá)
Na začiatku pomohlo spočítať si koľko stien má kocka, a toľko štvorčekov potom musel mať aj papier, ktorým bola obalená. Ale hlavné bolo vedieť si vyskúšať, alebo predstaviť, ako sa dá papier zo sochy zložiť a potom rozprestrieť. Dokopy ste vymysleli veľa zaujímavých spôsobov ako rozložiť papier ktorý bol na soche do roviny. Tu sú niektoré z nich:



Predstaviť si ako z rozloženého papiera, poskladať naspäť obal na sochu je tiež dosť ťažká úloha. Môžete si to vyskúšať z riešeniami, ktoré sú tu nakreslené.
Že je to celkom zaujímavý problém. Preto sa chcem poďakovať všetkým, ktorý (aj keď sme vám to v zadaní nekázali) napísali aj ako papier skladať naspäť do tvaru sochy. Vymysleli ste naozaj veľa rôznych zaujímavých spôsobov ako tento návod napísať. Napríklad takéto:



Úloha 2 (opravovala Soňa Galovičová)
Mnohí z vás vypísali správne všetky sústredené čísla – poďme si ale povedať postup, z ktorého bude jasné, že sme ich našli naozaj všetky.
V strede môžu byť číslice od 1 po 9. Viac číslic, ktoré by sme mohli dať do stredu, neexistuje. Ak by tu bola 0, tak by súčet zvyšných dvoch cifier tiež musel byť 0 – to vieme dosiahnuť len ako súčet 0+0. Číslo 000 sa ale píše ako 0, a to naozaj nevyzerá ako trojciferné.
Tak skúsme dať do stredu číslicu 1. Krajné cifry teda majú súčet 1, čo vieme dosiahnuť len sčítaním 1+0 alebo 0+1. Druhá možnosť však nevyhovuje – vzniklo by nám len dvojciferné číslo 11. **Riešenie s jednotkou v strede je teda len jedno – 110.**
Ako to funguje, keď si povieme aká bude stredná číslica? Na začiatok na miesto stoviek vieme dať ľubovoľnú cifru od 1 až do zvolenej strednej číslice. Menšie byť nemôže – číslo s 0 na začiatku by nebolo trojciferné. Väčšie taktiež nie, lebo by súčet určite presiahol strednú cifru. Pre každú takto zvolenú dvojicu číslic existuje číslica na miesto jednotiek – stačí od „strednej" odčítať „prvú" (napr. pre dvojicu 35 to bude 5-3=2, takže číslo 352). Keďže „prvá" je vždy menšia, nanajvýš rovná „strednej", tak táto „tretia" bude najmenej 0 a najviac „stredná cifra" – 1. Z toho čoho vyplýva, že to bude naozaj číslica a naozaj ju môžeme použiť ako cifru na miesto jednotiek.
Takto postupne teda naozaj vytvoríme všetky existujúce sústredné čísla – vyskúšame totiž všetky dvojice číslic od 1 do 9, kde „prvá" nie je väčšia od „strednej".
A koľko ich teda je? Nuž, pre určenú strednú cifru vieme vytvoriť toľko sústredených, koľko je čísel od 1 po strednú , čo sa rovná presne strednej cifre (napr. číslic od 1 do 5 je 5). Stredné číslice môžeme vyberať od 1 po 9, takže máme 1 sústredené číslo pre jednotku, 2 pre dvojku, atď, až 9 pre deviatku. Ich celkový počet teda dostaneme tak, že sčítame **1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45**. **Sústredených čísel je teda presne 45.**

Úloha 3 (opravovali Baška Klembarová a Baška Marečáková)
Bolo treba postupne preveriť každého matematika, či ním zapísaný priebeh experimentu mohol nejakým spôsobom nastať, alebo nemohol nastať nikdy. Vtedy bude podozrivý. Mojo napríklad tvrdil, že pri 13 hodoch bol rozdiel počtu párnych a počtu nepárnych výsledkov 3. Po troche skúšania zistíme, že mohol napríklad hodiť 5 párnych a 8 nepárnych čísel (alebo naopak), takže naozaj spolu hodil 13 krát a rozdiel bol 3. Mojo teda mohol zapísať priebeh experimentu správne a obviniť ho nemôžeme. Podobne sa dá ukázať, že pravdu mohli hovoriť aj Erika (7 a 3) a Hynek (82 a 48).
Iný prípad je s Katkou. Spolu hodila 13 krát. Môžeme preskúmať všetky tomu zodpovedajúce počty párnych a nepárnych hodov na kocke a dávať pozor, kedy ich rozdiel bude 4. Ale pre 13 párnych a 0 nepárnych je rozdiel 0, pre 12 a 1 je rozdiel 11, pre 11 a 2 je 9, pre 10 a 3 je 7, pre 9 a 4 je 5, pre 8 a 5 je 3, Pre 7 a 6 je 1, pre 6 a 7 je zase 1 (alebo -1, ale to stále nie je 4) atď. Prejdeme všetky možnosti, ale rozdiel 4 nám nikdy nevyšiel. **Katka preto určite klame, a je teda podozrivá**.
Miesto skúšania všetkých možností sa dala urobiť aj kratšia úvaha. Jurko napríklad napísal, že hodil 10 krát, a rozdiel počtu párnych a nepárnych výsledkov bol 3. Keď bol rozdiel hodov 3, môžeme z toho usúdiť, že jeden z týchto počtov bol párny a jeden nepárny. (Ak by boli oba párne alebo oba nepárne, ich rozdiel by bol párny, a teda nie 3). Ale keď jeden bol párny a druhý nepárny, ich súčet musí byť nepárny, a teda nemôže byť 10. **Jurko je preto druhý podozrivý**, jeho popis experimentu je určite nesprávny.
Keď sa zamyslíte nad posledným odsekom, môžete sami skúsiť vymyslieť pravidlo, ako je to s párnosťou (alebo nepárnosťou) súčtu a rozdielu dvojice čísel. Podarilo sa?

Úloha 4 (opravovala Kika Kovalčíková)
Preskúmame zvlášť každú sadu šípov.
Sada 7 šípov: Na každom šípe sú 3 pierka, teda dokopy máme 21 pierok. **V maloobchode**, kde predávajú 1 pierko za 1 €, **by sme za ne zaplatili 21€**. **Vo veľkoobchode** treba kúpiť niekoľko balíkov po 10 pierok. Stačia dva balíky? Nestačia, mali by sme iba 20 pierok a 1 by nám chýbalo. Takže vo veľkoobchode by sme museli kúpiť 3 balíky pierok. Jedno balenie stojí 8 €, teda za 3 balenia **by sme zaplatili 24 €**. **Majiteľovi sady so 7 šípmi sa preto oplatí ísť do maloobchodu.**
Sada 9 šípov: Tu máme dokopy 27 pierok. **V maloobchode za ne zaplatíme 27 €**. **Vo veľkoobchode** treba kúpiť 3 balíky po 10 pierok. Ak by sme kúpili len dva, 7 pierok by chýbalo. Takže vo veľkoobchode **by sme za pierka zaplatili 24 €**. **Tentoraz to vyšlo lacnejšie vo veľkoobchode**, takže majiteľovi sady s 9 šípmi sa oplatí ísť práve tam.