SEZAM, školský rok 2007/08, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
zima sa snáď ešte neskončila, no skončila sa zimná časť SEZAMu. Dúfame, že ste aj vďaka ťažkým matematickým orieškom Alice či Sherlocka Holmesa šikovnejší a múdrejší. Ak sa vám darilo, v obálke ste si už určite našli pozvánku na marcové sústredenie. Tešíme sa na vás!

Okrem toho sa tešíme na letnú časť našej súťaže, ktorá práve začína. Dostali ste aj zadania prvej letnej série, ktorou štartuje boj o najlepšie riešenia a o účasť v letnom tábore. Aby ste dosiahli čo najlepšie výsledky, oplatí sa prečítať si tieto vzorové riešenia.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Veľa úspechov v letnej časti vám za organizátorov želá Michal Prusák.

1. príklad

(opravoval Jakub Daubner)

Pozrime sa na to ako vyzerá súčin $LES \cdot LES$, rozpíšeme si ho ako násobenie pod seba (SE znamená súčin cifier S a E, preto SE je to isté ako ES):

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & L & E & S \\
 & & \cdot & L & E & S \\
\hline
 & & & SL & SE & SS \\
 & & EL & EE & ES & \\
 & LL & LE & LS & & \\
\hline
 & LL & 2LE & EE+2LS & 2ES & SS \\
\hline\hline
P & R & A & L & E & S
\end{array}
$$

Z jednotlivých súčtov v stĺpcoch nám môžu ostávať zvyšky, ktoré sa prenášajú do ďalšieho stĺpca vľavo. Najjednoduchšie preto bude určiť cifry L, E, S odzadu, teda najskôr S, potom E a nakoniec L.

Z posledného stĺpca vidíme, že posledná cifra súčinu SS je zase S. To spĺňajú iba cifry 0, 1, 5, 6. Preto pre S máme tieto štyri možnosti:

1. **Možnosť $\mathbf{S = 0}$.** Po dosadení máme rovnosť:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & LL & 2LE & EE & 0 & 0 \\
\hline
P & R & A & L & E & 0
\end{array}
$$

Z predposledného stĺpca vidíme, že $E = 0$, čo nemôže byť, keďže cifry S a E majú byť rôzne. Takže pre $S = 0$ riešenie neexistuje.

2. **Možnosť $\mathbf{S = 1}$.** Po dosadení máme rovnosť:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & LL & 2LE & EE+2L & 2E & 1 \\
\hline
P & R & A & L & E & 1
\end{array}
$$

Z predposledného stĺpca vidíme, že posledná cifra $2E$ je E. To platí jedine pre cifru $E = 0$. Opäť ju dosadíme, dostaneme

$$
\begin{array}{cccccc}
 & LL & 0 & 2L & 0 & 1 \\
\hline
P & R & A & L & 0 & 1
\end{array}
$$

Zo štvrtého stĺpca vidíme, že aj posledná cifra $2L$ je L, čo podobne ako predtým, platí len pre $L = 0$. To ale nemôže byť, lebo L a E majú byť rôzne.

3. **Možnosť $\mathbf{S = 5}$.** Po dosadení a pripočítaní zvyšku do ďalšieho stĺpca máme:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & LL & 2LE & EE+10L & 10E+2 & 5 \\
\hline
P & R & A & L & E & 5
\end{array}
$$

Z predposledného stĺpca vidíme, že posledná cifra $10E + 2$ je E. Keďže $10E$ poslednú cifru neovplyvní (premyslite si prečo), máme tak $E = 2$. Po dosadení a pripočítaní zvyšku:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & LL & 4L & 6+10L & 2 & 5 \\
\hline
P & R & A & L & 2 & 5
\end{array}
$$

Zo štvrtého stĺpca máme, že posledná cifra $10L + 6$ je L. Ani $10L$ poslednú cifru neovplyvní, dostávame $L = 6$. A to nám dáva prvé riešenie:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 6 & 2 & 5 \\
 & & \cdot & 6 & 2 & 5 \\
\hline
3 & 9 & 0 & 6 & 2 & 5
\end{array}
$$

4. **Možnosť S = 6.** Po dosadení a pripočítaní zvyšku do ďalšieho stĺpca máme:

$$\begin{array}{cccccc} & LL & 2LE & EE+12L & 12E+3 & 6 \\ \hline P & R & A & L & E & 6 \end{array}$$

Z predposledného stĺpca vidíme, že posledná cifra $12E+3$ je E. Keďže $12E+3$ je vždy nepárne číslo, tak E musí byť nepárna cifra. Vyskúšame všetky možné cifry, teda 1, 3, 5, 7, 9 a zistíme, že rovnica platí jedine pre $E = 7$. Po dosadení a pripočítaní zvyšku:

$$\begin{array}{cccccc} & LL & 14L+5 & 12L+7 & 7 & 6 \\ \hline P & R & A & L & 7 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & 3 & 7 & 6 \\ & & \cdot & 3 & 7 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{array}$$

Zo štvrtého stĺpca vidíme, že posledná cifra $12L+7$ je L. Keďže $12L+7$ je vždy nepárne číslo, aj L musí byť nepárna cifra. Opäť vyskúšame všetky nepárne cifry a zistíme, že rovnica platí jedine pre $L = 3$. Po dosadení by nám to dalo druhé riešenie, ale sú v ňom dve rovnaké cifry, takže v tomto prípade riešenie nemáme.

Po rozobratí všetkých možností sme zistili, že kód je jediný možný, a to PRALES = 390625.

Komentár k riešeniam: Úlohu niektorí riešili aj tak, že sa snažili overiť všetky alebo skoro všetky trojciferné čísla. Tento postup je veľmi pracný, ale niektorým z vás sa podarilo úlohu aj takto vyriešiť. Často ste ale zabúdali rozobrať všetky možnosti a po tom, ako ste našli jedno riešenie, ste prestali ďalej hľadať. Na to, aby ste zistili, či vie James kód jednoznačne určiť, musíte overiť aj zvyšné možnosti. Ak by mal algebrogram viac riešení, kód by sa nedal jednoznačne určiť.

2. príklad

(opravoval Peťo Novotný)

Na prvý pohľad sa môže zdať, že v zadaní je príliš málo informácií na určenie strelca šiesteho gólu. Skúsme preto z uvedených údajov odvodiť ďalšie. Celkom určite vieme, že v hre, v ktorej bol Francois brankárom, boli Alica aj Jean útočníkmi. Francois bol brankárom 8-krát, takže týchto 8-krát boli Alica a Jean útočníci. Zo zadania vieme, že Alica bola dokopy útočníkom 12-krát, takže ešte 4-krát musela byť útočníkom, keď brankárom nebol Francois, ale Jean. A z toho nám vychádza údaj, že Jean bol brankárom 4-krát (premyslite si to). Odtiaľ dostávame, že všetkých hier muselo byť 25 (lebo Jean bol 21-krát útočníkom a 4-krát brankárom). A keďže Alica bola 12-krát útočníkom, musela byť 13-krát brankárom.

Teraz teda vieme, že bolo

- 8 hier, v ktorých bol brankárom Francois (útočili Alica a Jean),
- 4 hry, v ktorých bol brankárom Jean (útočili Alica a Francois),
- 13 hier, v ktorých bola brankárom Alica (útočili Jean a Francois).

Môžeme ľahko skontrolovať, že tieto údaje súhlasia aj so zadaním, čo sa týka počtu útočení Alice a Jeana. Keď teraz skúšame tieto hry v nejakom poradí zoradiť za sebou, rýchlo si všimneme jednu vec. Žiadny z hráčov nemohol byť 2-krát po sebe brankárom, lebo po každej hre išiel do brány útočník, ktorý dal gól. Avšak Alica bola brankárom až 13-krát a útočníkom len 12-krát. Nutne teda musela byť brankárom na začiatku a potom striedavo každú druhú hru, t. j. v hrách s poradovými číslami $1, 3, 5, 7, \ldots, 25$. Vráťme sa teraz k otázke zo zadania. **Alica bola v siedmej hre brankárom. Musela preto v predošlej šiestej hre streliť gól. A tým je úloha vyriešená.**

Pre istotu môžeme vyrobiť jeden z možných rozpisov hier, aby sme ešte overili, či sa celá hra mohla takto odohrať. Napríklad v hrách s poradovými číslami 2, 4, 6, 8 mohol byť brankárom Jean a v ostatných párnych hrách Francois. Ale bez ohľadu na to, ako hra presne vyzerala, šiesty gól musela dať Alica.

3. príklad

(opravoval Tomáš Matula)

Tento príklad bol jednoduchý. Farby lôpt si označíme M ako modrá, Č ako červená a Ž ako žltá. Máme štyri lopty a chceme ich rozdať trom žonglérom tak, aby každý mal nejakú loptu. Jeden z nich preto musí mať dve lopty, ostatní po jednej. Povedzme, že ten s dvomi loptami je Atos. Portos a Aramis budú mať po jednej. Aké máme možnosti pre Atosa?

V prípade, že má dve modré lopty MM, Portosovi a Aramisovi ostali Č a Ž. Vieme im ich rozdať dvomi spôsobmi, buď Portosovi Č, Aramisovi Ž alebo naopak.

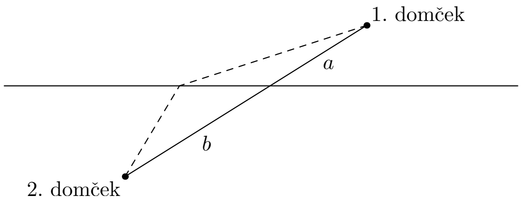
Ak by mal Atos M a Č, Portosovi a Aramisovi ostali M a Ž. Rovnako ako predtým im ich vieme rozdať dvomi spôsobmi. Veľmi podobná situácia je, ak má Atos M a Ž, dostaneme tak ďalšie dva spôsoby.

Napokon, ak by mal Atos Č a Ž, Portosovi a Aramisovi ostali dve modré lopty. Tu máme iba jeden spôsob, lebo aj Portosovi aj Aramisovi musíme dať modrú loptu (inú možnosť nemáme).

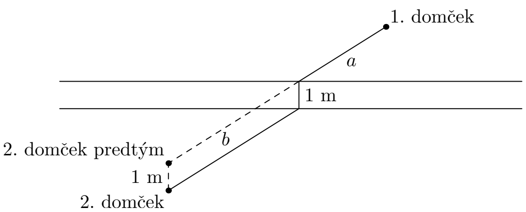
Spolu máme $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ spôsobov v prípade, že dve lopty má Atos. Ale dve lopty môže mať Portos a môže ich mať aj Aramis. Máme preto $3 \cdot 7 = 21$ spôsobov rozdelenia lôpt. (Poriadne si premyslite, prečo stačí počet spôsobov, keď má dve lopty Atos, jednoducho vynásobiť tromi.)

4. príklad

(opravoval Škrečok Prusák)



Predstavme si najprv, že by riečka bola veľmi úzka – bola by to iba priamka. Najkratšiu trasu medzi domčekmi by sme našli jednoducho, bola by to priama cestička. To, prečo by to naozaj bola najkratšia trasa, vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti. Súčet dvoch (čiarkovaných) strán trojuholníka je väčší než jeho tretia strana. Označme si dĺžku cestičky od 1. domčeka k rieke ako a, od 2. domčeka k rieke ako b.



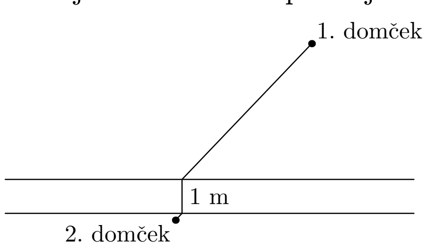
Problémy nám ale robí riečka. Nemôžeme ju prejsť šikmou čiarou, lebo máme krátku lavičku, ktorá má stáť kolmo na riečku. Zoberme si prvý obrázok, na ktorom bola riečka iba priamka, a potiahnime jeho časť „pod“ riečkou o jeden meter nižšie, aby nám tam vznikla riečka tak široká, ako má byť. Druhý domček a cestička k nemu sa nám posunuli o meter nižšie (pôvodná cestička je čiarkovane).

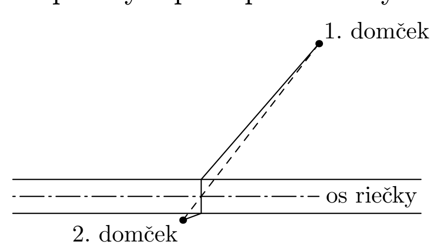
Najkratšia trasa z prvého domčeka na miesto, kde bol druhý domček pred posunutím, meria $a+b$ metrov. Dôležité je teraz uvedomiť si, že **vždy musíme prejsť jeden meter po mostíku kolmom na riečku, nech ku riečke a od riečky ideme hocijako**. Takže najkratšia trasa z prvého domčeka do druhého **by mohla** merať $a + b + 1$ metrov. Teda akokeby sme šli po najkratšej trase v prípade, že riečka je iba priamka, na miesto, kde bol druhý domček predtým a potom jeden meter (kolmo na riečku) na miesto, kde je druhý domček teraz (skúste si to poriadne premyslieť).

Takúto najkratšiu trasu aj s mostíkom cez riečku ľahko zostrojíme. Zoberieme si nepokreslený obrázok s riečkou a domčekmi, posunieme druhý domček o meter vyššie a spojíme oba domčeky čiarou (to je čiarkovaná čiara na druhom obrázku). **Tam, kde táto čiara pretne riečku treba postaviť mostík.** Potom spojíme konce mosta s domčekmi a máme najkratšiu možnú trasu. Dobre si rozmyslite, ako si môžeme byť istý tým, že je naozaj najkratšia možná. V prípade tejto najkratšej trasy je cestička od prvého domčeka k riečke rovnobežná s cestičkou od druhého domčeka k riečke. Prečo to tak je?

Komentár k riešeniam: Veľa z vás úlohu nevyriešilo úplne správne. Napríklad ak ste si spojili oba domčeky, zobrali si miesto, kde táto spojnica domčekov pretína os rieky a tam postavili mostík, nedostali ste najkratšiu trasu. Preto sa nedalo ani dobre zdôvodniť, že je najkratšia. Na mnohých pekných obrázkoch to tak možno vyzeralo, ale chyba bola možno v tom, že ste si to neskúsili na „škaredých“ obrázkoch. Napríklad čo ak je jeden z domčekov veľmi blízko k riečke?

Najkratšia možná trasa je tá vľavo. Tá vpravo je trasa získaná nesprávnym postupom mnohých z vás:





Keďže obrázky sú narysované dostatočne presne, môžete preto obe trasy porovnať aj odmeraním...

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	8	6	2	3
najmenej sa páčila	4	4	7	6
najťažšia bola	1	9	1	10
najľahšia bola	5	1	12	3