JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2011/12, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
sme veľmi radi, že nám došla kopa pekných riešení problémov z ďalekých galaxií. Ak sa chcete dozvedieť, ako ste mohli svoje riešenia napísať lepšie, alebo sa dozvedieť ako ináč sa dali úlohy riešiť, tak si prečítajte tieto vzorové riešenia. Taktiež na vás čaká tretia séria s novými príhodami kapitána Jeana a lode Enterprise. Po jej úspešnom vyriešení na najlepších riešiteľov čaká zimné sústredenie, takže teraz je správny čas zabrať a ponamáhať svoje matematické svaly poslednými štyrmi úlohami tohto polroku.
Stále prosím dbajte na poctivé vypisovanie hlavičiek a skúste nezabudnúť poslať spolu so sériou aj spiatočnú obálku.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

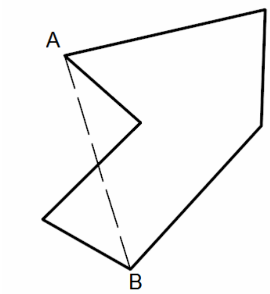
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (**opravovala Denisa Múthová**)

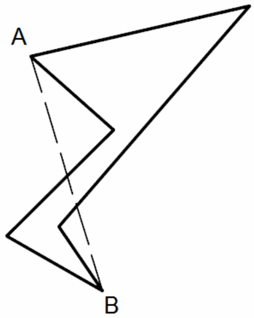
S touto úlohou ste si poradili veľmi dobre. Väčšina z Vás mala správny výsledok aj postup riešenia.
Zopakujme si, čo máme vypočítať. Krupiér má 99 strieborných a 1 zlatý žetón, spolu 100. Dianka vyťahuje žetóny až kým nevytiahne práve zlatý žetón. Krupiér povedal, že zo žetónov, ktoré mu Dianka vrátila, je práve 98 % žetónov strieborných.
Dianka krupiérovi okrem strieborných žetónov vrátila aj jeden zlatý. Keďže strieborné žetóny tvoria 98% vrátených žetónov, tak jeden zlatý žetón tvorí 100% - 98% = 2% vrátených žetónov. Jeden žetón teda tvorí 2% všetkých vrátených žetónov, čiže všetkých vrátených žetónov je dokopy 50 (50 x 2% = 100%). Dianka teda krupiérovy vrátila 49 strieborných a 1 zlatý žetón.
A čo dostala Dianka? Z celkového množstva 100 žetónov odpočítame množstvo, ktoré vrátila (50 žetónov) a dostaneme číslo 50. Dianka si vo vrecúšku odniesla 50 žetónov.

Príklad č. 2 (**opravoval Janči Jakubík**)

Ako nájsť taký 6-uholník ktorý sa dá pomocou jednej úsečky rozdeliť na dva 5-uholníky?
Ak sa pokúšame rozdeliť pravidelný 6-uholník, tak sa nám ho vždy podarí rozdeliť buď na dva 4-uholníky alebo na trojuholník a 5-uholník. Prečo sa nám pravidelný 6-uholník nepodarí rozdeliť na dva 5-uholníky?
Ako isto dobre vieme 6-uholník má 6 vnútorných uhlov. Ak rozdelíme úsečkou 6-uholník tak tou istou úsečkou rozdelíme aj dva z jeho vnútorných uhlov, a teda nám pribudnú dva uhly. Preto vieme z takto rozdeleného 6-uholníka vytvoriť iba geometrické útvary ktoré majú súčet počtov vnútorných uhlov 6 + 2 = 8 (Preto vieme vytvoriť dva 4-uholníky alebo 5-uholník a 3-uholník).
Na to aby sme teda vedeli rozdeliť 6-uholník na dva 5-uholníky potrebujeme aby nám úsečka ktorou režeme 6-uholník pridala štyri uhly. Prečo štyri? Pretože 6-uholník má 6 vnútorných uhlov a dva 5-uholníky majú počet vnútorných uhlov 5 + 5 = 10. 10 - 6 = 4 uhly, ktoré potrebujeme úsečkou vytvoriť.
Po chvíľke času stráveného s ceruzkou a papierom sa dostávame k čiastočnému výsledku a to takémuto obrázku:

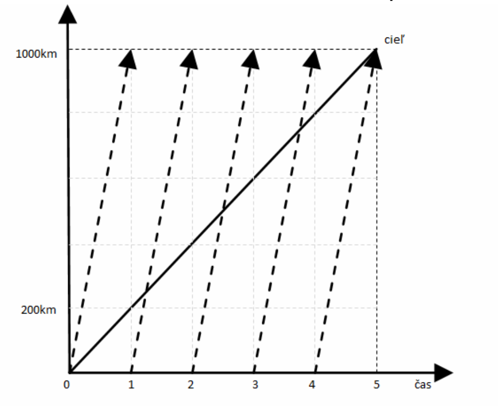


Úsečka ktorou režeme 6-uholník nám ho rozdelila na 3-uholník a 6-uholník . Súčet počtu vnútorných uhlov oboch vzniknutých telies je 9. Na tomto obrázku si vieme všimnúť zaujímavý vec: Vnútorný uhol pri vrchole A nie je rozdelený na dve časti, avšak tým že nám rezná úsečka pretína jednu stranu pôvodného 6-uholníka tak nám vytvára + 2 uhly navyše. Ten to jav vieme využiť pri hľadaní riešenia. Ak takúto istú vec spravíme aj pri vrchole B tak dostaneme riešenie, pretože vytvoríme štyri nové uhly a žiadne nestratíme delením pôvodných vnútorných uhlov na polovicu. Našli sme šesťuholník, ktorý vieme rozdeliť úsečkou spájajúcou dva vrcholy, na dva 5-uholníky:



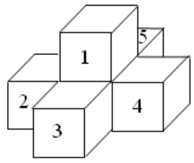
Príklad č. 3 (*opravoval Didi Hudec****)***

Stíhačky lietajú päťkrát rýchlejšie ako Enterprise. To znamená, že kým Enterprise preletí celú trasu, tak stihne preletieť presne päť stíhačiek. Z toho vieme, že stíhačky stretnú Enterprise raz na štarte (tu sa Enterprise stretne s prvou stíhačkou), raz na konci (tu s poslednou-piatou stíhačkou) a 3-krát počas letu. Keďže letia stálou rýchlosťou, vzdialenosť medzi jednotlivými stretnutiami bude rovnaká. Tri stíhačky, ktoré sa stretnú s Enterprise počas letu, rozdelia stretnutiami celú trasu dlhú 1000 km na 4 rovnaké časti. Stretnutia teda budú každých 250km. Lode sa potom stretnú v: 0 km, 250 km, 500 km, 750 km a 1000 km.
V zadaní sme nemali danú rýchlosť Enterprise, čo viacerí z vás jednoducho vyriešili a zvolili si nejakú vlastnú(dokonca medzi riešeniami bol aj odhad, že Enterprise letí 20km za hodinu:). Potom ste sa snažili vyjadriť v akom čase sa lode stretli a dopočítali ste, kde to bolo.



Pekné grafické riešenie tohto problému vyzerá nasledovne. Prerušované čiary so šípkou sú stíhačky a tmavá čiara z bodu 0 do cieľa je Enterprise. Miesta kde sa lode stretli sa dajú odčítať z grafu – sú to miesta kde sa čiary pretnú. Napr. vidíme, že tretia stíhačka vyštartuje v čase 2, vtedy má Enterprise za sebou už 400km. S touto stíhačkou sa stretne po ďalších 100 kilometroch, čiže celkovo v polovici trasy. Od začiatku do cieľa sa stretne Enterprise so stíhačkami celkovo 5 krát

Príklad č. 4 (*opravovala Betka Bohiníková****)***



Budeme používať písmenko B na označenie bielej bunky a písmenko Č na označenie čiernej bunky. Vyrábame veže zo šiestich buniek, ktoré si môžeme vybrať spomedzi 4B a 4Č. Chceme zistiť koľko rôznych veží sa dá poskladať tak, aby sme videli vždy inak zafarbenú vežu.
Označme si najskôr jednotlivé bunky veže číslami 1, 2, 3, 4 a 5 (ako na obrázku). Poslednú bunku, ktorú nevidíme, označme číslom 6. To akej farby bude bunka č. 6 nás nemusí zaujímať, pretože ju nevidíme. Tým pádom zmena farby bunky č. 6 nám nevytvorí inú vežu.
Takže nás zaujíma, len koľko je možných rôznych zafarbení buniek 1, 2, 3, 4 a 5.
Šesť buniek na vežu vyberáme z 4B a 4Č. Takže veža môžeme mať buď 4B a 2Č, alebo 3B a 3Č, alebo 2B a 4Č bunky. Prejdime jednotlivé možnosti:
1. možnosť: 4B a 2Č bunky. Zaujíma nás akej farby budú bunky 1, 2, 3, 4 a 5. Ak bude bunka č. 6 biela, tak zostanú 3B a 2Č. Vypíšme postupne všetky možnosti ako zafarbiť bunky 1, 2, 3, 4 a 5:
1Č 2Č 3B 4B 5B, 1Č 2B 3Č 4B 5B, 1Č 2B 3B 4Č 5B, 1Č 2B 3B 4B 5Č, 1B 2Č 3Č 4B 5B, 1B 2Č 3B 4Č 5B,
1B 2Č 3B 4B 5Č, 1B 2B 3Č 4Č 5B, 1B 2B 3Č 4B 5Č, 1B 2B 3B 4Č 5Č.
Je tu spolu 10 rôznych veží. Skúste si ich vyfarbiť a rozmyslieť si, či sú naozaj všetky.
Ak bude bunka č.6 čierna, tak nám zostanú 4B a 1Č bunka. Opäť vypíšme všetky možnosti ako zafarbiť bunky 1, 2, 3, 4 a 5:
1Č 2B 3B 4B 5B, 1B 2Č 3B 4B 5B, 1B 2B 3Č 4B 5B, 1B 2B 3B 4Č 5B, 1B 2B 3B 4B 5Č.
Spolu 5 rôznych veží. Vždy bude čierna iná zo sledovaných piatich buniek.
Takto by sme mohli pokračovať aj pri ďalších dvoch možnostiach (veža je z 3B a 3Č, alebo 2B a 4Č buniek). Opäť treba rozlíšiť akej farby je 6. bunka a teda aké farby majú byť na zvyšných piatich bunkách.
2. možnosť: 3B a 3Č bunky. Z piatich buniek, okrem bunky č. 6, budú buď 2B a 3Č (ak je 6. bunka B), alebo 3B a 2Č (ak je 6. bunka Č). Ak by sme si opäť rovnako vypísali možné kombinácie farieb na jednotlivých bunkách, dostali by sme po 10 rôznych veží pre obe možnosti.
Tu si ale treba dať pozor na jednu vec. Veže, ktoré mali na bunkách 1, 2, 3, 4 a 5 použité 2Č a 3B už boli započítané pri predošlej možnosti (keď sme používali 4 biele a 2 čierne bunky a 6. bunka bola B), takže by sme ich započítali znovu. Ale každú možnosť máme započítať len raz, preto pri možnosti 3B a 3Č pribudne len 10 rôznych veží (keď je 6. bunka B a používame 2B a 3Č bunky).
3. možnosť: 2B a 4Č bunky. Ak bude 6. bunka Č, ostanú nám 2B a 3Č bunky, ale veže z takýchto buniek sme už započítali v 2. možnosti. Ak bude 6. bunka B, ostanú nám 4Č a 1B bunka. Z takýchto farieb sme ešte veže nerobili, takže ich môžeme zarátať. Spolu ich bude 5 rôznych veží. Vždy bude biela jedna bunka z 1, 2, 3, 4 a 5 a ostatné čierne.
Takže dokopy sme našli 5+10+10+5=30 rôznych veží. V príklade si bolo treba urobiť systém v zakresľovaní jednotlivých veží, aby ste na niektorú nezabudli, alebo ju nemali viackrát.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
najviac sa páčila	16	1	6	2
najmenej sa páčila	0	8	3	13
najťažšia bola	2	10	7	5
najľahšia bola	16	2	5	2