JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2009/10, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
snehu je zatiaľ síce pomenej, no na dvere už pomaly klopú Vianoce. Od SEZAMu vám pod stromček posielame zadania 3. zimnej strašidelnej série. Po jej úspešnom vyriešení na najlepších riešiteľov čaká sústredenie, ktoré sa uskutoční od 18. do 21. marca v Trenčianskom Jastrabí. Takže teraz je ten správny čas na nasadenie všetkých svojich matematických buniek do riešenia posledných štyroch strašidelných úloh v tomto polroku. Aby ste však nič nenechali na náhodu, prečítajte si predtým aj tieto vzorové riešenia minulej série. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za všetkých organizátorov vám pekné Vianoce, všetko dobré v novom roku (a snáď aj nejaký sneh) želá Michal Prusák.

1. príklad *(opravovala Lenka Matejovičová)*

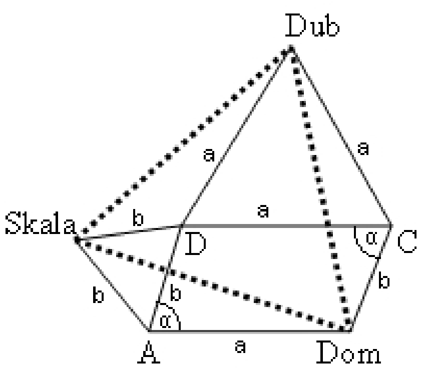
Predtým ako sa pustíme do riešenia, si všimnime jednu zaujímavú skutočnosť. Vieme, že keď strašidlo ukrylo jednu misu, potom v ostatných ostalo dokopy trikrát viac jabĺk ako sliviek. To znamená, že ak je sliviek s, tak jabĺk je $3 \cdot s$ a všetkých dokopy je $4 \cdot s$. Práve sme zistili, že vo zvyšných misách musí byť spolu taký počet ovocia, ktorý je deliteľný štyrmi.

Teraz si skúsme predstaviť, že by strašidlo schovalo misu s 5 slivkami. Potom vo zvyšných misách by bolo dokopy 122 kusov ovocia. Číslo 122 sa nedá rozdeliť na štyri bezo zvyšku, čiže na základe toho, čo sme si vyššie ukázali, strašidlo nemohlo schovať misu **s 5 slivkami**. Podobne by sme ukázali, že nemohlo schovať misu **s 26 slivkami**.

Skúsme si ukázať, že strašidlo nemohlo ukryť misu so 7 slivkami. Ak by ju ukrylo, zvyšného ovocia je $5+19+26+31+39 = 120$ kusov. Na základe prvého odstavca je tam $3 \cdot s$ jabĺk a s sliviek. To znamená, že by tam muselo byť 30 sliviek. Číslo 30 môžeme skladať iba z (neskrytých) mís s počtom ovocí maximálne 30, v tomto prípade z čísel 5, 19 a 26. Ak vezmeme len jedno číslo, určite to bude príliš málo. Skúsime teda všetky dvojice a trojice: $5 + 19 = 24$, $5 + 26 = 31$, $19 + 26 = 45$ a jediná trojica je $5 + 19 + 26 = 50$. Ani jedna kombinácia nám nedáva presne 30, preto strašidlo určite nemohlo schovať misu **so 7 slivkami**. Skúste si rovnako ukázať aj na misách **s 19 a 39 slivkami**, že ich strašidlo nemohlo schovať.

Posledná misa, ktorú sme ešte nevyskúšali, je s 31 slivkami. Vtedy ostanú misy 5, 7, 19, 26, 39. Dokopy je v nich 96 kusov ovocia. Na slivky pripadá štvrtina, teda 24 kusov. Vidíme, že 24 vieme dostať ako $5 + 19$, vo zvyšných misách potom je $7 + 26 + 39 = 72 = 3 \cdot 24$, čo sú jablká. Všetko je v poriadku jedine v tomto poslednom prípade, **preto strašidlo muselo ukryť misu s 31 slivkami**.

2. príklad *(opravoval Miro Hudec)*



Označme si jednu stranu rovnobežníka a, druhú b a veľkosť uhla $DADom$ ako α. Podľa zadania môžeme dopísať veľkosti strán rovnostranných trojuholníkov $DCDub$ a $ADSkala$ ako a či b.

Uhol $DomCD$ je tiež α, lebo protiľahlé uhly rovnobežníka sú zhodné. Trojuholníky $SkalaADom$ a $DomCDub$ sú zhodné podľa vety *sus*, pretože sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom, ktorý má veľkosť $60^\circ + \alpha$. Je to totiž súčet uhla v rovnostrannom trojuholníku a α. Tieto zhodné trojuholníky majú aj tretie (bodkované) strany rovnako dlhé, preto platí $|SkalaDom| = |DomDub|$.

Pozrime sa teraz bližšie na trojuholník $SkalaDDub$. S vyššie spomenutými trojuholníkmi má zhodné tiež dve strany. Musíme ešte zistiť veľkosť jeho uhla $SkalaDDub$. Okolo bodu D sú štyri uhly, ktorých súčet je 360°. Dva z nich sú vnútorné uhly rovnostranných trojuholníkov, ich veľkosť je teda 60°. Tretí z týchto uhlov je vnútorný uhol rovnobežníka $ADomCD$. V rovnobežníku je súčet všetkých uhlov 360°, preto vieme uhol ADC vypočítať takto:

$$|\sphericalangle ADC| = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha.$$

Už poznáme tri uhly okolo body D, ten posledný štvrtý vieme dopočítať ako

$$|\sphericalangle SkalaDDub| = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - (180^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha.$$

Trojuholník $SkalaDDub$ je preto zhodný s $DomCDub$ a aj s trojuholníkom $SkalaADom$ (podľa vety *sus*). Vďaka zhodnosti musia byť aj ich tretie (bodkované) strany rovnako dlhé, z čoho vyplýva, že **trojuholník *SkalaDomDub* je naozaj rovnostranný**.

3. príklad

(opravoval Tomáš Rizman)

Je viacero možností, ako sa dá ukázať, že víly a duchovia sa na pníky **naozaj nevedia usadiť**. Očíslujme vrcholy 110-uholníka od 1 po 110. Usaďme teraz duchov podľa ich požiadaviek, napríklad na miesta $10, 20, 30, 40, \ldots, 110$ (tvoria vrcholy pravidelného 11-uholníka). Iné usadenie duchov sa od tohto líši iba otočením. Vyskúšajme medzi duchov usadiť víly. Ak sa nám to nepodarí v tomto prípade, nepodarí sa nám to ani v žiadnom otočenom.

Stačí vyskúšať posadiť jednu vílu postupne na miesta 2, 3, 4, 5, 6, 7 alebo 8 (na prvom a deviatom totiž víla sedieť nemôže). Potom treba zistiť, kde budú sedieť ostatné víly a nájsť miesto, kde nastáva problém. Skúste si premyslieť, ako sa to dá v jednotlivých prípadoch urobiť.

Krajšie a trocha náročnejšie bolo pozrieť sa na posledné cifry miest, ktoré sú vrcholmi 11- a 5-uholníka. Pri 11-uholníku končia všetky čísla miest rovnakou cifrou, pretože vzdialenosť medzi nimi je 10. Pri 5-uholníku je na mieste jednotiek vždy buď $0, 2, 4, 6, 8$ alebo $1, 3, 5, 7, 9$ (sami ľahko prídete na to, prečo je to tak). A teda aj keď je posledná cifra miest duchov hocijaká, vždy bude nejaký duch buď susediť alebo sa prekrývať s niektorou vílou. Ak totiž duchovia sedia na miestach s poslednou cifrou c, medzi $0, 2, 4, 6, 8$ alebo $1, 3, 5, 7, 9$ vždy nájdeme buď samotnú cifru c alebo takú, ktorá sa líši iba o jedna ($c - 1$ alebo $c + 1$). Duchovia sa teda nijako „neskryjú“ medzi víly.

4. príklad

(opravovala Ľubka Peprníková)

Označme si n počet mnohonôžkiných nôh. Rozdelíme si mnohonôžkine obúvanie na tri časti podľa toho, či si obúva žiadnu, jednu, alebo obe červené topánky.

- Keď si obuje len **samé modré topánky**, má len **jeden spôsob**, ako sa obuť, a to pre akýkoľvek počet nôh.
- Keď si obuje **jednu červenú topánku**, dá si ju na jednu zo svojich nôh. Keď sa chce obuť inak, iba ju prezuje na inú nohu. Takže takto sa obuje toľkými rôznymi spôsobmi, koľko má nôh, čiže **n spôsobmi**.
- Najťažší je prípad, keď si obuje **obe červené topánky**. Vtedy si môže jednu z nich obuť na prvú nohu a tú druhú postupne prezúvať na ostatné nohy (tak, ako keď mala len jednu červenú topánku). Nezíska už n rôznych možností obutia, ale len $(n - 1)$, lebo na prvú nohu si nemôže obuť naraz dve topánky. Potom prezuje červenú topánku z prvej nohy na druhú. Druhú červenú topánku zase prezúva na všetky ostatné nohy okrem prvej, lebo takto sa už raz obula. Teraz sa obuje už len $(n - 2)$ spôsobmi. Takto postupne prezúva prvú topánku na ďalšie nohy, až ju napokon prezuje na tú predposlednú. Vtedy má už len jednu možnosť, ako si obuť druhú topánku, a to tak, že si ju dá na poslednú nohu. Celkovo si teda dve červené topánky môže obuť $(\mathbf{n} - \mathbf{1}) + (\mathbf{n} - \mathbf{2}) + \cdots + \mathbf{2} + \mathbf{1}$ **spôsobmi**.

Spolu je

$$1 + n + ((n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1) = 1 + 1 + 2 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

rôznych spôsobov ako sa obuť, ak má mnohonôžka n nôh. My vieme, že sa obula 56-timi rôznymi spôsobmi. Teraz môžeme napríklad od 56 odčítať najskôr 1 a potom postupne odčítavať 1, 2, ..., až kým nedostaneme nulu. Posledné odčítané číslo bude naše n. V tomto prípade to vyjde

$$56 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10,$$

takže **mnohonôžka má 10 nôh**.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	4	9	5	9
najmenej sa páčila	4	7	11	6
najťažšia bola	3	16	8	1
najľahšia bola	8	3	8	10