SEZAM, školský rok 2008/09, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
Vianoce už pomaly klopú na dvere a za nami je druhá séria nášho a hlavne vášho matematického seminára. Pred nami je už len posledná tretia séria, po nej sa stretneme na marcovom sústredení. Takže teraz je ten správny čas na nasadenie všetkých svojich matematických schopností, hor sa do riešenia nových štyroch kovbojských úloh, máte na ne dlhé zimné prázdninové večery... Určite vám pritom pomôže aj poctivé štúdium týchto vzorových riešení.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám veselé Vianoce, veľa snehu a všetko dobré v novom roku želá Michal Prusák.

1. príklad *(opravovala Ľubka Peprníková)*

Najjednoduchšie bolo začať od druhého, tretieho alebo štvrtého zistenia. Keďže väčšina z vás začala od tretieho, začnime tak aj my.

Bob a Chuck boli buď obaja vinní alebo obaja nevinní.

Najskôr sa pozrime, čo by sa dialo, keby boli obaja vinní. Podľa druhého tvrdenia bol práve jeden z dvojice Bob a Edward nevinný. Keďže Bob bol vinný, tak Edward bol nevinný. Podľa štvrtej výpovede bol práve jeden z dvojice Chuck a Danny nevinný. Keďže Chuck bol vinný, tak Danny musel byť nevinný. Podľa piateho tvrdenia bol najviac jeden z dvojice Andy a Edward nevinný. No a keďže Edward bol nevinný, tak Andy musel byť vinný. Ešte je toto riešenie treba skontrolovať s prvou vetou, podľa ktorej bol aspoň jeden z dvojice Andy a Chuck vinný. Toto je splnené, vinní sú obaja. **Takže vinníkmi v tomto prvom prípade boli Andy, Bob a Chuck.**

Teraz sa pozrime, ako by to vyzeralo, keby boli Bob a Chuck nevinní. Podľa prvého tvrdenia bol aspoň jeden z dvojice Andy a Chuck vinný. Chuck bol nevinný, takže vinný musel byť Andy. Ďalej podľa druhej výpovede bol práve jeden z dvojice Bob a Edward nevinný. Ako sme už zistili, musel to byť Bob, teda Edward bol vinný. Podľa štvrtého tvrdenia bol práve jeden z dvojice Chuck a Danny nevinný. Keďže Chuck bol nevinný, musel byť Danny vinný. Napokon ešte musíme overiť piate tvrdenie, podľa ktorého bol najviac jeden z dvojice Andy a Edward nevinný. Toto je splnené, lebo boli obaja vinní. **V tomto druhom prípade boli vinníkmi Andy, Danny a Edward.** S istotou vie šerif dokázať aspoň Andyho vinu.

2. príklad *(opravovala Ika Bachratá)*

Tento príklad sa dal riešiť tak, že si spočítame, koľko je všetkých čiernych a koľko všetkých červených mnohouholníkov. Potom ešte treba vysvetliť, prečo ich už viacej nie je, a sme hotoví.

Kto sa ale nad týmto príkladom poriadne zamyslel, mohol si túto robotu ušetriť. Stačilo si uvedomiť, že z každého čierneho n-uholníka vznikne pridaním červeného kolu červený $(n+1)$-uholník. To znamená, že bez ohľadu na to, koľko ich je, platí:

počet čiernych 5-uholníkov = počet červených 6-uholníkov,
počet čiernych 4-uholníkov = počet červených 5-uholníkov,
počet čiernych 3-uholníkov = počet červených 4-uholníkov.

Žiadne ďalšie čierne n-uholníky už nie sú. Totiž n-uholník musí mať aspoň tri vrcholy, najmenšie n-uholníky sú preto trojuholníky. Na 6-uholníky a ešte väčšie n-uholníky už nemáme dosť kolov. Existujú ale ďalšie červené n-uholníky, konkrétne trojuholníky (všimnite si, že sme ich počet zatiaľ nikde nepočítali). Taký červený trojuholník je aspoň jeden. To ale znamená, že **červených n-uholníkov bude viac než čiernych n-uholníkov** (bude ich viac presne o počet červených trojuholníkov).

3. príklad *(opravovala Kajka Janíková)*

Označme si súčet čísel v jednom štvorci 2×2 ako S. Takých štvorcov tam máme deväť. Takisto si do veľkého štvorca vpíšme namiesto prázdnych políčok písmenká, ktoré budú označovať neznáme čísla (tie potrebujeme zistiť).

a	7	b	4
5	6	c	d
e	f	11	1
3	g	2	h

Napríklad z modrého štvorca úplne vľavo vieme, že

$$a + 7 + 5 + 6 = S.$$

Všimnime si teraz dva štvorce pod ním, súčet v nich musí byť rovnaký, preto musí platiť

$$5 + 6 + e + f = e + f + 3 + g.$$

Z toho vidno, že g musí byť 8 (lebo e a f si môžeme z oboch strán rovnice odmyslieť). Podobne pre štvorce v pravom hornom rohu máme

$$b + 4 + c + d = c + d + 11 + 1,$$

z čoho podobne ako predtým dostaneme, že aj b musí byť 8 (c a d si môžeme odmyslieť). Veľmi podobne vieme zistiť aj to, že $d = 9$ a $e = 10$. Skúste si rozmyslieť, z ktorých dvojíc štvorcov sa na to dá prísť.

a	7	8	4
5	6	c	9
10	f	11	1
3	8	2	h

Zatiaľ sa nám takto podarilo doplniť náš veľký štvorec. Z prostredných dvoch štvorcov, v ktorých vystupuje písmenko f dostaneme, že

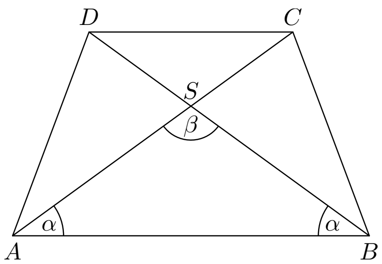
$$5 + 6 + 10 + f = 6 + c + f + 11.$$

Z toho dorátame písmenko $c = 4$ (lebo f si môžeme z oboch strán rovnice odmyslieť). Niektoré štvorce 2×2 už máme vyplnené celé. Z nich sa dá ľahko zistiť, že ten **rovnaký súčet S, ktorý má v každom štvorci 2×2 byť, bude rovný 25**. Naša úloha bude mať preto iba jedno riešenie. Poďme ešte zistiť, ako bude štvorec presne vyzerať. Stačí už len voľné políčka doplniť do spomínaného súčtu 25, čo sa dá iba takto:

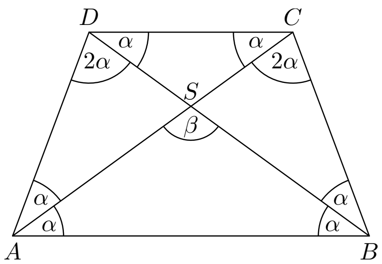
7	7	8	4
5	6	4	9
10	4	11	1
3	8	2	11

4. príklad

(opravoval Škrečok Prusák)



Najprv si skúsme zdôvodniť, prečo musí byť trojuholník ABS rovnoramenný. Celý lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný. To znamená, že dvojica bodov A a D musí byť od seba rovnako vzdialená ako dvojica bodov B a C. Ak by bod S bol bližšie k niektorému z bodov A alebo B, celý lichobežník by sa nám naklonil na jednu stranu. Vtedy by už neboli priamky AB a CD rovnobežné, a to by už nebol lichobežník. Teda bod S je od bodov A a B rovnako ďaleko, preto musí byť trojuholník ABS rovnoramenný. Uhly pri základni hocakého rovnoramenného trojuholníka majú rovnakú veľkosť, označme si ich v trojuholníku ABS ako α, hľadanú veľkosť uhla ASB si označíme β.



Poďme teraz hľadať uhly veľkosti α aj inde na obrázku. Túto veľkosť musia mať aj uhly SCD a SDC kvôli rovnobežnosti priamok AB a CD. Sú to takzvané *striedavé* uhly k uhlom SAB a SBA. Zo zadania máme, že trojuholníky ACD a DBC sú rovnoramenné. Aj oni musia mať pri základniach uhly rovnakej veľkosti, vďaka tomu môžeme doplniť náš lichobežník o ďalšie uhly SBC a SAD, ktoré majú veľkosť α.

V celom lichobežníku nepoznáme už len dva uhly ADS a BCS. Podľa zadania musia byť aj trojuholníky ADB a BCA rovnoramenné, veľkosti ich uhlov pri základni poznáme vďaka uhlom DAB a ABC. Aj zvyšné uhly ADS a BCS pri základni majú veľkosť $\alpha + \alpha = 2\alpha$.

No a sme pomaličky na konci riešenia. Poznáme veľkosti všetkých uhlov pri vrcholoch lichobežníka. Ich súčet musí byť 360°, teda

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha = 10\alpha = 360°.$$

Z toho jednoducho dopočítame, že $\alpha = 36°$. Teraz už len stačí použiť fakt, že v trojuholníku ABS je súčet uhlov 180°, z čoho vieme určiť veľkosť hľadaného uhla β ako

$$\beta = 180° - \alpha - \alpha = 180° - 36° - 36° = 108°.$$

Klady na stavbu pódia k sebe treba priložiť pod uhlom 108°.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	11	3	9	3
najmenej sa páčila	0	6	5	15
najťažšia bola	0	2	3	21
najľahšia bola	14	10	2	0