JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2007/08, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
máme za sebou druhú sériu nášho obľúbeného matematického korešpondenčného seminára. Pred nami je posledná tretia, ktorá rozhodne aj o tom, kto bude pozvaný na marcové sústredenie. Teraz je ten správny čas nasadiť všetky svoje matematické schopnosti a sily. Určite vám pri tom pomôže aj poctivé štúdium vzorových riešení. Tak hor sa do čítania...
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

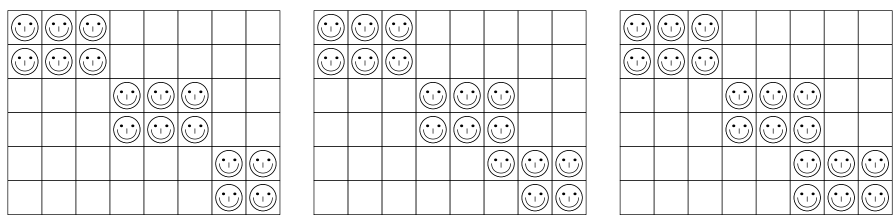
Za organizátorov vám veselé Vianoce a šťastný Nový rok aj nový rok želá Michal Prusák.

1. príklad *(opravoval Ondro Mikuláš)*

Táto úloha nebola veľmi zložitá, stačilo si poriadne prečítať zadanie a chvíľu premýšľať. Vieme, že v každom stĺpci sú najmenej dva obrazy, takže **na celej stene je najmenej** $2 \cdot 8 = 16$ **obrazov**, pretože tam je osem stĺpcov. Keby bolo obrazov menej, našiel by sa aspoň jeden stĺpec, v ktorom je menej obrazov.

Podobne vieme zistiť, koľko najviac obrazov môže byť na stene. Je na nej šesť riadkov, a v každom sú najviac tri obrazy. **Najväčší možný počet obrazov na stene je preto** $3 \cdot 6 = 18$**.** Ak by ich bolo 19 alebo ešte viac, tak by sme našli riadok, v ktorom sú viac ako tri obrazy (zamyslite sa nad tým).

Zistili sme, koľko najviac a koľko najmenej obrazov môže byť na stene. Mnohí ste práve tu prestali riešiť a napísali výsledok, že na stene môže byť 16, 17 alebo 18 obrazov. To ale celkom nestačilo, bolo treba ešte nájsť vyhovujúce rozmiestnenie pre každý možný počet obrazov. Pokojne sa totiž mohlo stať, že pre niektorý z možných počtov rozmiestnenie neexistuje. Tu sú konkrétne rozmiestnenia pre 16, 17 a 18 obrazov:



Mimochodom, obraz zo zadania naozaj zobrazuje jednu sieň v slávnej galérii Louvre. Namaľoval ho Samuel B. Morse, vynálezca telegrafu a morzeovky, ktorý bol povolaním (aj) maliar.

2. príklad *(opravoval Miro Hudec)*

Aby bol skutočný obvod trojuholníka iný než ten, čo nameral Sherlock, jedna jeho strana musí mať 4 cm alebo 6 cm. Podobne nemohol chybne odmerať dve strany – keďže musia mať navzájom rôzne dĺžky, tak jedna by musela mať 4 cm a druhá 6 cm. V skutočnosti by potom merali 6 cm a 4 cm, čím by sa obvod nezmenil. Napokon nemôžeme mať tri chybne odmerané strany, pretože to by museli mať dve z nich rovnakú dĺžku. Všetky strany trojuholníka však musia mať rôznu dĺžku. Z týchto úvah dostávame, že Sherlock **chybne odmeral práve jednu stranu trojuholníka**.

Všetky možné dĺžky strán trojuholníka, pričom jeho obvod je 15 cm, jedna z jeho strán je 4 cm alebo 6 cm, a všetky strany sú navzájom rôzne, sú iba tieto:

Sherlock nameral	skutočné rozmery	trojuholníková nerovnosť
4, 1, 10	6, 1, 10	$6+1<10$
4, 2, 9	6, 2, 9	$6+2<9$
4, 3, 8	**6, 3, 8**	$6+3>8$
6, 1, 8	4, 1, 8	$4+1<8$
6, 2, 7	4, 2, 7	$4+2<7$

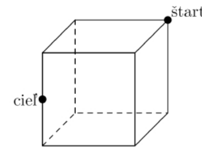
Keď zameníme 4 cm za 6 cm a naopak, aby sme dostali skutočné rozmery, ostáva overiť, či daná trojica čísel môže byť dĺžkami strán trojuholníka. Musíme overiť, či pre ne platí trojuholníková nerovnosť. Na to stačí, ak porovnáme súčet dvoch kratších strán s najdlhšou stranou (poriadne si to premyslite).

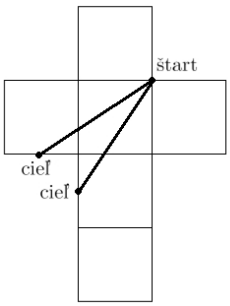
Nerovnosť spĺňa iba jedna, zvýraznená trojica rozmerov. **Preto sú** 3 cm, 6 cm **a** 8 cm **jediné možné skutočné rozmery trojuholníka** (a teda aj omietky).

3. príklad

(opravoval Rasťo Lenhardt)

Veľa z vás si po tom, čo ste zistili, že priamo na kocke sa tá cesta hľadá ťažšie, nakreslilo steny kocky do roviny (nakreslilo plášť). Na plášti kocky je už potom vidno, že **najkratšia cesta pre pavúky je priama cesta**. Ak by cesta nebola rovná, viedla by aj cez iný bod X (v tomto bode by sa „lomila“). Ak by sme ho spojili so štartom a s cieľom, súčet dĺžok by bol väčší. Použijeme, podobne ako v minulej úlohe, trojuholníkovú nerovnosť. Vo všetkých trojuholníkoch, aj v tom našom s vrcholmi X, štart a cieľ platí, že súčet dĺžok dvoch strán je väčší ako dĺžka tretej strany.





Ako vidno z obrázku plášťa, máme dve možné najkratšie cesty. V oboch prípadoch vieme dĺžky týchto ciest vypočítať z pravouhlých trojuholníkov pomocou Pytagorovej vety. Situácia pre obe cesty je symetrická. Odvesny týchto trojuholníkov sú v oboch prípadoch dlhé jeden meter a $1,5$ metra, preto pre dĺžku najkratšej cesty c platí $c^2 = 1^2 + 1,5^2$; takže $c = \sqrt{3,25}$ metra.

Už vieme skoro všetko. Mohlo by nás ešte zaujímať, ktorým smerom sa majú pavúky po štarte vybrať. Kde je ten bod, ktorým majú prechádzať cez hranu kocky? Pozrime sa na plášť kocky na cestu, ktorá ide k (dole) nakreslenému cieľu. Za $1,5$ metra, o ktorých sa pavúk posunul vertikálne od štartu, posunul sa doľava o jeden meter. Tento pomer ostáva zachovaný, a preto kým poklesol o jeden meter (dostal sa na hranu kocky), tak sa doľava posunul o $2/3$ metra.

4. príklad

(opravoval Hynek Bachratý)

Našim cieľom je povedať kúzelníkovi jednu vetu a na jej základe získať aspoň na chvíľu zlatú krabičku. Zo zadania a príkladu v ňom je jasný postup kúzelníka. Vypočuje si vetu a zváži, či je pravdivá. Ak áno, požičia nám striebornú krabičku (o ktorú nám nejde), ale **musí tiež platiť to, čo veta tvrdí**. Ak je veta nepravdivá, striebornú krabičku nám nepožičia (čo nás netrápi), a **nesmie platiť to, čo veta tvrdí**. Pokiaľ si kúzelník môže vybrať, či je veta pravda alebo nie, rozhodne sa výhodnejšie pre seba.

Je teda jasné, že naša veta mu nesmie dať šancu takto vykľučkovať. Zároveň o požičaní zlatej krabičky rozhodne nie len pravdivosť vety (tá má vplyv len na požičanie striebornej), ale aj jej obsah. Musí sa preto vhodným spôsobom týkať aj požičania zlatej krabičky. Oplatilo sa začať skúmať takýto typ viet. Ak s nimi získame skúsenosti, rýchlo sa podarí nájsť aj správne vety. Tu sú niektoré z riešení:

„Nepožičiate mi žiadnu krabičku.“ Ak by veta bola pravdivá, musel by kúzelník požičať striebornú krabičku. To je ale spor medzi skutočnosťou a vetou (ak predpokladáme, že je pravdivá), preto veta nemôže byť pravdivá. Ak je veta nepravdivá, musí platiť jej opak. Kúzelník nám teda musí požičať nejakú krabičku. Ale ak je veta nepravdivá, nesmie to byť strieborná. Zostáva mu len zlatá, čo sme chceli dosiahnuť. V tomto prípade veta mohla byť len nepravdivá, ale aj tak sme dosiahli, čo sme potrebovali. Je zaujímavé, že kúzelníkovi sme povedali skoro presný opak toho, čo sme chceli, aby urobil…

„Zlatú krabičku mi požičiate práve vtedy, keď striebornú.“ Alebo inak sa to dá povedať takto: „Buď mi požičiate obe alebo žiadnu.“ Ak je táto veta pravdivá, musí nám požičať striebornú, a zlatú (keďže je to pravda) nám požičia spolu s ňou. Ak je veta nepravdivá, nesmie nám požičať striebornú. Ale keďže nie je pravda, že ich požičiava obe alebo ani jednu, musí nám požičať zlatú. Teraz mohla byť veta aj pravdivá aj nepravdivá, ale v oboch prípadoch je zlatá krabička naša!

„Ak mi požičiate striebornú, potom mi požičiate aj zlatú krabičku.“ Vysvetlenie si skúste urobiť sami. Táto veta pre zmenu nemôže byť nepravdivá.

Niektorí z vás mali skoro správne riešenie, napríklad len časť vyššie napísaných viet. Alebo bola veta dobrá, len chýbalo úplne presné vysvetlenie, prečo na kúzelníka zaberie. Niektorí ste navrhovali vety typu „Chcem si požičať zlatú krabičku“ a podobne. U nich kúzelník musí uznať, že je to pravdivá veta. Ale na základe toho vám požičia len striebornú krabičku. Jeho povinnosťou bolo iba dodržiavať pravidlá hry a logiky, nie plniť vaše želania. A niektorí sa snažili povedať kúzelníkovi milú vetu alebo mu zalichotiť. To by určite platilo na vedúcich SEZAMu, ale francúzsky kúzelník mal hrošiu kožu…

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	6	5	3	12
najmenej sa páčila	4	7	6	7
najťažšia bola	2	3	4	16
najľahšia bola	14	4	4	5