JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2010/11, vzorové riešenia 1. zimnej série

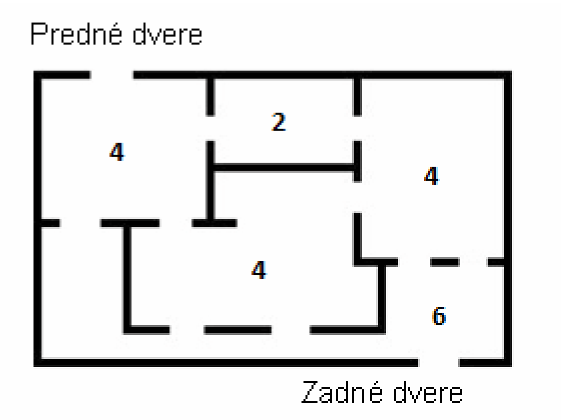
Milí riešitelia,
sme radi, že ste sa úspešne popasovali s úlohami z nádvoria hradu pána Rolanda. Ak chcete vedieť, ako to dopadlo, stačí si pozrieť poradie. Ak nechcete zopakovať chyby, ktoré ste urobili, alebo sa dozvedieť ako ináč sa dali úlohy riešiť, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Čaká na Vás druhá séria s novými príhodami panoša Athosa. A keď Vám možno prvá séria nevyšla podľa predstáv, určite sa oplatí pokračovať. Každým príkladom, ktorý sa pokúsite vyriešiť, sa zlepšia Vaše matematické schopnosti.
Ak máte kamarátov alebo spolužiakov, ktorí by tiež radi riešili SEZAM, tak im skúste požičať zadania druhej série. Ak budú šikovný, tak aj s dvomi dobre zrátanými sériami sa im môže podariť dobre sa umiestniť a dostať sa na zimné sústredenie. Ďalej vás prosíme aby ste nezabudli so svojimi riešeniami posielať aj spiatočnú obálku s nalepenými známkami a s vypísanou Vašou adresou. Taktiež dbajte na poriadne vypisovanie hlavičky ku každému príkladu. Nakoniec by sme vás chceli poprosiť, aby ste si v poradí skontrolovali svoje údaje. Ak sú niektoré chybné, napíšte nám a opravíme ich. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý

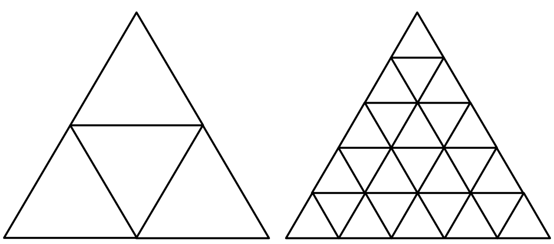
Príklad č. 1 *(opravoval Maťo Bachratý)*

Mnohý z vás riešili tento príklad vypisovaním všetkým možností. Niektorí ste si toto vypisovanie rôznymi trikmi skrátili. Napríklad ste vypísali iba možnosti, kde sa nachádzal Diablo naľavo od Frencia, a potom tento počet možností vynásobili dvoma (možnosti kde je Diablo od Frencia napravo sú tie isté ako tie, kde je Diablo naľavo od Frencia, stačí len žrebcov vymeniť). Ďalšia užitočná vec, ktorú si niektorí z vás všimli, bola to, že ak si Diabla a Frencia dáme do dvoch ohrádok, tak že si nevadia (čiže nie do susedných), tak potom v nich môžu zostať 5 dní, pretože Luna (L) môže byť v hociktorej zo zvyšných piatich ohrádok. Stačí nám teda zistiť koľkými rôznymi spôsobmi môžeme umiestniť Diabla (D) a Frencia (F) do ohrádok tak, aby neboli v susedných. Toto číslo potom vynásobíme piatimi a máme výsledok (ku každému umiestneniu D a F vieme L dať do ľubovoľnej zo zvyšných piatich ohrádok). Poďme teda zistiť koľkými spôsobmi vieme dať do ohrádok D a F. Zrátajme to podľa toho, kde sa nachádza D. Ak je D v ohrádke (1), tak F môže byť v ohrádkach (3), (4), (5), (6) a (7), čiže vo všetkých okrem (1) a (2) (v (1) je D a (2) je susedná s (1)), čo je 5 možností. Ak je D v ohrádke (2), tak F môže byť v ohrádkach (4), (5), (6), (7), čo sú 4 možnosti. Ak je D v ohrádke (3), tak F môže byť v ohrádkach (1), (5), (6), (7) - 4 možnosti. Ak je D v ohrádke (4), tak F môže byť v ohrádkach (1), (2), (6), (7) - 4 možnosti. Ak je D v ohrádke (5), tak F môže byť v ohrádkach (1), (2), (3), (7) - 4 možnosti. Ak je D v ohrádke (6), tak F môže byť v ohrádkach (1), (2), (3), (4) - 4 možnosti. Ak je D v ohrádke (7), tak F môže byť v ohrádkach (1), (2), (3), (4), (5) - 5 možností. Dokopy teda D a F môžu byť v ohrádkach umiestnení 5+4+4+4+4+4+5 = 30 spôsobmi (môžete si skúsiť zrátať iba možnosti kde je D naľavo od F a potom ich vynásobiť dvoma).
Všetky tri kone teda vieme do stajne umiestniť 30 x 5 = 150 spôsobmi.

Príklad č. 2 *(opravoval Didi Hudec)*

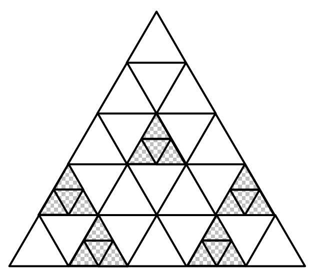


Dopíšme si do každej miestnosti počet otvorených dverí, ktoré do nej idú. Všimnime si, že na začiatku ide do každej miestnosti párny počet otvorených dverí. Každými z nich môže Prego prejsť iba raz. Ak teda prejde cez nejakú miestnosť (dnu a von), dvoje dvere sa tým zatvoria. Počet otvorených dverí sa teda po prejdení miestnosťou zmenší o dva, čiže zostane párny. Ak by Prego zostal v nejakej miestnosti zatvorený, musel by vojsť do miestnosti kde vedú už iba 1 otvorené dvere (tým by posledné otvorené dvere zavrel a ostal by uväznený, v inej situácii sa buď do miestnosti nedostane, alebo z nej bude môcť aj vyjsť). Vidíme však, že na začiatku majú všetky miestnosti párny počet otvorených dverí a tak to zostane vždy, keď Prego prejde nejakou miestnosťou. Čiže nikdy nenastane taká situácia, kedy by Prego nemohol odísť z miestnosti, takže sa vždy nakoniec dostane von.

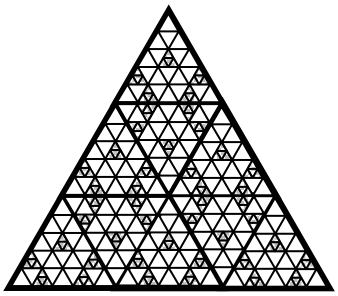


Príklad č. 3 *(opravovala Erika Trojáková)*

Pri delení trojuholníka na časti, ako vyžaduje zadanie, nám pomôže, keď vieme, na aké rovnaké trojuholníčky sa dá trojuholník rozdeliť. Na obrázkoch naľavo vidíte trojuholník nakrájaný strednými priečkami na štyri trojuholníky a inými priečkami na 25 rovnakých trojuholníkov. (Skúste zistiť, aká dlhá je strana malého trojuholníčka, keď je rovnakých malých trojuholníkov vo veľkom trojuholníku 4, 25 alebo 100! Aké všetky počty rovnakých trojuholníkov sa dajú nakrájať?)



Poďme teraz naše krájacie možnosti využiť a skúsme niektoré trojuholníky z delenia na 25 trojuholníkov ďalej krájať na <u>štyri</u> menšie. Tie nakrájané na menšie ofarbíme zlatou, tie čo krájať nebudeme ofarbíme striebornou farbou. Keďže strieborných aj zlatých má byť rovnako veľa, tak na každé štyri strieborné musia pripadať štyri zlaté. Inak povedané, na každé štyri trojuholníky, čo nebudeme ďalej krájať musí pripadať jeden, čo krájať budeme. Keďže trojuholníkov je 25, tak to vieme urobiť – 20 trojuholníkov nebudeme ďalej krájať a zvyšných 5 rozkrájame na štyri časti – pozri si obrázok. Takto omaľovaný, nakrájaný štít spĺňa podmienky zadania. (Skúste podobným spôsobom zistiť, koľko trojuholníkov treba nakrájať na štyri menšie časti, ak by ste na začiatku základný trojuholník rozdelili na 100 menších trojuholníkov.)



Na záver pridávam skvelý nápad od *Paľka Petruša*. Pri ňom sa naučíme vytvoriť nové ofarbenia z tých, ktoré už poznáme. Podľa *Paľka* stačí rozdeliť trojuholník na niekoľko rovnakých častí (štyri, deväť, ...) a na každej z nich urobiť podobné krájanie ako to, čo sme predtým vymysleli. Tým aj dostávame druhé riešenie (trojuholník sme nakrájali na 9 častí a potom sme každú ďalej delili vrchným spôsobom).

Príklad č. 4 *(opravoval Ondro Mikuláš)*

S touto úlohou ste si poradili veľmi dobre. Dôležité bolo uvedomiť si, že počet mincí sa nemení. Menia sa len hodnoty mincí. Napríklad na 42. mieste bude na konci päťdesiatcentovka. Najprv zameníme jednocentovku za dvojcentovku (42 je deliteľná dvomi), potom túto dvojcentovku vymeníme za päťcentovku (42 je deliteľné troma), nakoniec túto päťcentovku vymeníme za päťdesiatcentovku, lebo 42 je deliteľné šiestimi. Mnohí z vás si vypísali všetkých 120 mincí tak, ako boli na stole po piatich výmenách a spočítali ich hodnoty. Tento postup viedol väčšinou ku správnemu výsledku, no bol dosť pracný. Môžeme to urobiť šikovnejšie.

Pri každom čísle od 1 po 120 musíme zistiť, akým najväčším číslom z čísiel 1, 2, 3, 4, 5 a 6 je deliteľné bezo zvyšku. Podľa toho zistíme ktorá z piatich výmen sa na tejto pozícii uskutočnila ako posledná. Následne budeme vedieť, hodnotu mince ktorá na tejto pozícii zostala. Výpočet si môžeme zjednodušiť s použitím nasledovnej finty. Platí, že číslo 60 je deliteľné každým z čísel 1 až 6. Pri každej výmene vymeníme aj mincu na 60. mieste. Teraz si môžeme predstaviť, že keď meníme mincu napríklad na pozícii 6, tak určite vymeníme aj mincu na mieste 60 + 6 = 66. Ku každému z čísel 1 až 60 teda existuje minca-dvojička, ktorá je na pozícii o 60 väčšej, ktorá sa vymení rovnaký počet krát. Platí teda, že mince na pozíciách 1 až 60 majú rovnakú hodnotu ako mince na pozíciách 61 až 120. Situáciu si pre prvých niekoľko členov ilustrujme tabuľkou

Pozície 1-60	1	2	3	4	5	6	7	8
Pozície 61-120	61	62	63	64	65	66	67	68
Najväčší deliteľ z čísel 1 až 6	1	2	3	4	5	6	1	4
Hodnota mince v centoch na konci	1	2	5	10	20	50	1	10

Poďme teraz spočítať hodnotu mincí na pozíciách 1 až 60 po poslednej výmene.

- 50-centovky: Je ich 60/6 = 10. Dívame sa na každé šieste číslo.
- 20-centovky: Všetkých čísel deliteľných číslom 5 je 60/5=12. Čísla 30 a 60 sme ale už započítali v predchádzajúcom prípade, na konci budú vymenené za 50c. Preto 20c je 12 – 2 =10.
- 10-centovky: Všetkých čísel deliteľných číslom 4 je 60/4=15. Čísla 12, 24, 36, 28, 60 a čísla 20 a 40 sme započítali v predchádzajúcich prípadoch. Preto je ich nakoniec len 8.
- 5-centovky: Všetkých čísel deliteľných číslom 3 je 60/3=20. Odpočítame všetky deliteľné 6, lebo tie sú deliteľne tromi. Teraz musíme odpočítať počet čísel deliteľných číslom 3 a zároveň číslom 5, ale nie číslom 6. Tie sú 15 a 45. Preto je ich 20-10-2=8.
- 2-centovky: Všetkých čísel deliteľných číslom 2 je 60/2=30. Odpočítame všetky deliteľné 6, lebo tie sú deliteľne dvomi. Teraz odpočítame všetky čo sú deliteľné číslami 2 a 5 ani číslom 6. Tie sú 10, 20, 40, 50. Teraz odpočítame všetky čo sú deliteľne číslami 2 a 4, no nie sú deliteľné číslom 5 a číslom 6. Tie sú 4, 8, 16, 28, 32, 44, 52 a 56. Musíme ešte odpočítať čísla, čo sú deliteľné číslom 2 a 3, no nie sú deliteľne číslami 4, 5 a 6. Také však neexistujú, pretože tie čísla čo sú deliteľné 2 a 3 sú deliteľne aj číslom 6. Keď to zosumarizujeme, dostaneme, že zostáva 30-10-4-8. To je spolu 8.
- 1-centovky Tento počet vypočítame jednoducho. To sú všetky čo sme nezapočítali v predošlých prípadoch. Teda to sú tie, ktoré sa ani raz nevymenili. Spolu ich je 60-10-10-8-8-8 = 16.

Teraz už vieme zistiť hodnotu mincí na pozíciách 1 až 60. Je to 10.50+10.20+8.10+8.5+8.2+16.1=852 centov. Ešte musíme započítať všetky čísla na pozíciách 61 až 120. Tie však majú rovnakú hodnotu ako čísla na pozíciách 1 až 60. V mešci je hodnota 852.2 = 1704 centov. To je 17 grošov a 4 centy.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
najviac sa páčila	5	13	2	7
najmenej sa páčila	9	3	11	4
najťažšia bola	6	0	16	7
najľahšia bola	2	16	2	7