JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2009/10, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
sme radi, že napriek strašidelnému začiatku školského roka ste nezabudli na prvú strašidelnú sériu SEZAMu a popasovali ste sa so strašidelnými úlohami. Ak chcete vedieť, ako to dopadlo, stačí si pozrieť poradie. Ak nechcete zopakovať chyby, ktoré ste urobili, alebo sa dozvedieť aj o iných spôsoboch riešenia úloh, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Čaká na vás druhá séria s novými príhodami Olivera so strašidlom. Aj keď vám možno prvá séria nevyšla podľa vašich predstáv, určite sa oplatí pokračovať. Každý príklad, ktorý sa pokúsite vyriešiť, určite zlepší vaše matematické schopnosti.

Ak máte kamarátov alebo spolužiakov, ktorí by tiež radi riešili SEZAM, skúste im požičať zadania druhej série. Ak budú šikovní, aj s dvomi dobre zrátanými sériami sa im môže podariť dobre sa umiestniť a dostať sa na zimné sústredenie. Ďalej vás prosíme, aby ste si v poradí skontrolovali svoje údaje, ak sú niektoré chybné, napíšte nám a opravíme ich.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Michal Prusák.

1. príklad

(opravoval Ondro Mikuláš)

Poďme hľadať číslo, ktoré mohlo byť posledné v postupnosti napísanej na papieri. Budeme postupne skúšať dosadzovať si zaňho nejaké čísla. Musíme si pritom dávať pozor na to, aby súčet všetkých čísel v postupnosti neprekročil 2009. Skúsme dosadiť napríklad číslo 40. Teraz treba zistiť, čomu sa rovná súčet $1 + 2 + \cdots + 40$. Najjednoduchšie ho určíme tak, že sčítame prvé a posledné číslo z postupnosti. V našom prípade to je 41. Tento súčet sa bude opakovať aj vtedy, ak sčítame druhé a predposledné, tretie a predpredposledné číslo z postupnosti atď. Musíme preto súčet 41 vynásobiť počtom takýchto dvojíc, ktorých je v tomto prípade 20. Celkový súčet čísel v postupnosti $1 + 2 + \cdots + 40$ sa preto rovná $20 \cdot 41 = 820$. Vidíme však, že je to málo. Totiž ak by sme teraz pripočítali druhýkrát k 820 ľubovoľné číslo od 1 do 40, dostali by sme menšie číslo ako 2009. Musíme preto skúšať ďalej.

Sčítavame čísla po 60. V súčte $1 + 2 + \cdots + 60$ máme 30 dvojíc po 61, čo je spolu $30 \cdot 61 = 1830$. Je to opäť málo, lebo keby sme k 1830 pripočítali ľubovoľné číslo spomedzi 1 až 60, dostali by sme najviac $1830 + 60 = 1890$, čo je menej ako 2009.

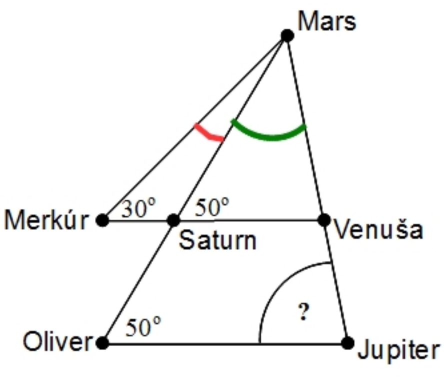
Sčítavame čísla po 61. V súčte $1 + 2 + \cdots + 61$ máme 30 dvojíc po 62 a jedno prostredné číslo, ktoré nemá dvojicu. Ak si vypíšeme všetky tieto sčítance, ľahko zistíme, že tým prostredným „nespárovaným" číslom je 31. Celkový súčet je spolu $30 \cdot 62 + 31 = 1891$. Zase je to málo, lebo aby sme dostali 2009, potrebovali by sme druhýkrát zarátať číslo 118 ($1891 + 118 = 2009$). Toto číslo ale medzi 1 až 61 nemáme.

Sčítavame čísla po 62. V súčte $1 + 2 + \cdots + 62$ máme 31 dvojíc po 63, čo je spolu $63 \cdot 31 = 1953$. Do súčtu 2009 nám chýba len $2009 - 1953 = 56$, ktoré máme medzi číslami v postupnosti. Našli sme prvé riešenie, **pod machuľou je číslo** 62 **a dvakrát sme započítali** 56.

Ešte sme však neskončili. Našli sme síce riešenie, ale nemáme záruku, že je jediné. Zatiaľ vieme, že ak by bolo pod machuľou menšie číslo ako 62, súčet čísel by bol primalý (ako sme už vyskúšali). Čo by sa ale stalo, ak by bolo pod machuľou väčšie číslo? Vyskúšajme **sčítať čísla až po 63.** V súčte $1 + 2 + \cdots + 63$ máme 31 dvojíc po 64 a jedno prostredné číslo 32, ktoré nemá dvojicu. Celkový súčet je spolu $31 \cdot 64 + 32 = 2016$. Lenže to je už priveľa, lebo neexistuje také prirodzené číslo, ktoré by sme mohli pričítať k 2016, aby sme dostali iba 2009. S väčšími číslami ako 63 by sa tento súčet ešte viac zvýšil. Nájdené riešenie je preto jediné, **chudák Oliver strávil so strašidlom až** 56 **týždňov**.

2. príklad

(opravoval Škrečok Prusák)



Označme si priesečník úsečiek *Oliver–Mars* a *Merkúr–Venuša* ako planétu *Saturn*. Jednotlivé planéty a *Olivera* budeme pre jednoduchšie zapisovanie volať ich prvými dvoma písmenkami (*Jupiter=Ju*, *Mars=Ma*, *Merkúr=Me*, *Saturn=Sa*, *Venuša=Ve* a *Oliver=Ol*). Vďaka tomu, že sú úsečky *Me–Ve* a *Ol–Ju* rovnobežné, bude uhol *VeSaMa* rovnako veľký ako uhol *JuOlMa*. Sú to súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách preťatých priečkou. Keďže vieme, že veľkosť uhla *JuOlMa* je 50°, môžeme si dopísať 50° aj k uhlu *VeSaMa*. Ďalej ľahko zistíme veľkosť uhla *MeSaMa*, pretože je susedný k *VeSaMa*. Majú dohromady 180°, preto má uhol *MeSaMa* veľkosť $180° - 50° = 130°$.

Pozrime sa teraz na trojuholník *Merkúr–Saturn–Mars*. Poznáme v ňom už dva uhly a vieme, že súčet uhlom v trojuholníku je 180°. Neznámy červený uhol *MeMaSa* má preto veľkosť $180° - 30° - 130° = 20°$. Zo zadania vieme, že zelený uhol *OlMaJu* je trikrát väčší, má preto $3 \cdot 20 = 60°$. Nakoniec sa už len stačí pozrieť na veľký trojuholník *Oliver–Mars–Jupiter*. Aj v ňom už poznáme dva uhly, pri *Oliverovi* je 50° a pri *Marse* je 60°. Tiež vieme, že súčet všetkých troch jeho uhlov je 180°. Hľadaný uhol ? pri planéte *Jupiter* preto vieme vypočítať ako $180° - 50° - 60° = 70°$.

Presná veľkosť uhla pri planéte Jupiter je 70°.

3. príklad

(opravovala Ajka Bachratá)

Našou úlohou bolo zistiť, aké bude počasie, keď pôjdu na výlet všetci šiesti kamaráti. Vieme, že každý z nich buď priťahuje alebo odpudzuje dážď. Počasie na výlete je vždy podľa toho, ktorých je viac. Predtým už boli na štyroch výletoch:

1. výlet: Boli tam Oliver, Peter a Martin a pršalo.
2. výlet: Boli tam Oliver, Eva a Martin a svietilo slnko.
3. výlet: Boli tam Oliver, Martin, Juraj a Sofia a pršalo.
4. výlet: Boli tam Oliver, Eva a Juraj a svietilo slnko.

Oliver bol na všetkých štyroch výletoch. Preto by nám asi najviac pomohlo vedieť, či priťahuje alebo odpudzuje dážď. Vyskúšame obe tieto možnosti, pretože by mohli byť obe správne.

Možnosť Oliver priťahuje dážď. Keď sa pozrieme na 2. výlet, vidíme, že Eva aj Martin musia odpudzovať dážď. Keby niektorý z nich dážď priťahoval, na tomto výlete by boli aspoň dvaja priťahujúci dážď. To by potom nemohlo svietiť slnko. Podobne to bolo na 4. výlete. Tam Oliver priťahoval dážď, takže aby bolo pekne, museli Eva aj Juraj odpudzovať dážď. Zatiaľ máme, že Oliver priťahuje dážď a Eva, Martin aj Juraj odpudzujú dážď.

Pozrime sa teraz na 3. výlet. Na ňom bol Oliver, Martin, Juraj a Sofia. Keďže Martin aj Juraj odpudzujú dážď, už by na tomto výlete nemohlo pršať. Buď by bolo pekne, ak by Sofia odpudzovala dážď. Alebo by bolo zamračené, ak by Sofia priťahovala dážď (boli by dvaja na dvoch). **Takže toto sa nemohlo stať, preto Oliver nemôže priťahovať dážď.**

Možnosť Oliver odpudzuje dážď. Najskôr sa pozrime na 1. výlet. Peter aj Martin musia priťahovať dážď, aby na tomto výlete pršalo. Potom sa pozrime na 3. výlet. Na ňom museli byť tri alebo štyri deti, ktoré priťahujú dážď (inak by bolo len zamračené alebo slnečno). Jeden z výletníkov Oliver odpudzuje dážď, preto ho musia zvyšné tri deti priťahovať. Vieme zatiaľ, že Oliver odpudzuje dážď a Peter, Martin, Juraj aj Sofia ho priťahujú.

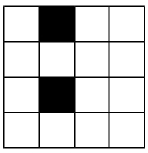
Ešte musíme prekontrolovať 2. a 4. výlet, či na nich bolo správne počasie. Na 2. výlete boli Oliver (odpudzuje dážď), Peter (priťahuje dážď) a Eva (nevieme). Keďže svietilo slnko, Eva musí odpudzovať dážď. Ostáva ešte overiť posledný výlet. Na ňom boli Oliver (odpudzuje dážď), Eva (odpudzuje dážď) a Juraj (priťahuje dážď), teda svietilo slnko, čo je správne. Všetky výlety sú pri tejto možnosti v poriadku.

Vyhovuje iba jedna možnosť pre Olivera, a to keď odpudzuje dážď. Teraz už len zistíme, ako bude na výlete, keď pôjdu všetky deti. Oliver a Eva odpudzujú dážď. Peter, Martin, Juraj a Sofia ho priťahujú. Viac je detí, ktoré priťahujú dážď, preto **bude na spoločnom výlete pršať**.

4. príklad

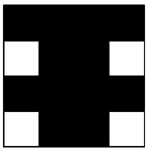
(opravoval Janči Jakubík)

Kocku si rozrežeme po poschodiach a pozorne sčítame počet malých ebenových kociek na jednotlivých poschodiach. Biela farba znázorňuje ebenové kocky a čierna miesta tunelov. Začneme zhora od štvrtého poschodia.



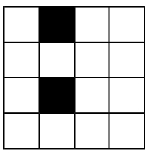
4. poschodie.

Na tomto poschodí vidíme iba dve čierne kocky. Sú to dva tunely, ktoré vedú zhora nadol. Na tomto poschodí sa nepretínajú so žiadnym ďalším tunelom (spredu či zboku), sú tam preto iba 2 vytunelované kocky. Celé poschodie bolo tvorené 16 ebenovými kockami, **ostalo ich tam $\mathbf{16 - 2 = 14}$**.



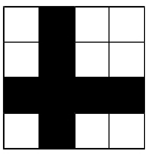
3. poschodie.

Na tomto poschodí vidíme šesť tunelov: dva tunely sprava doľava, dva tunely spredu dozadu a dva tunely zhora nadol. Tie zhora nadol nemusíme brať do úvahy, pretože sa na tomto poschodí pretínajú s inými tunelmi. Ostatné tunely (spredu a zboku) sa pretínajú na štyroch miestach, ktoré musíme odrátať. Celkovo je vyhryzených $4 \times 4 - 4 = 12$ kociek, **ebenové tam ostali iba 4**.



2. poschodie.

Toto poschodie je rovnaké ako štvrté poschodie, nevidno tu žiadne tunely spredu ani zboku. Aj tu máme iba 2 vytunelované kocky kvôli tunelom, ktoré vedú zhora nadol. **Ebenových kociek tam ostalo $\mathbf{16 - 2 = 14}$.**



1. poschodie.

Na tomto poschodí vidno jeden tunel sprava doľava a jeden spredu dozadu. Pretínajú sa v jednej kocke, čo nám dáva $8 - 1 = 7$ vyhryzených kociek. Navyše dva tunely, ktoré vedú zhora nadol, opäť nemusíme brať do úvahy. Na tomto poschodí sa totiž pretínajú s inými tunelmi. Celkovo teda na tomto poschodí **ostalo $\mathbf{16 - 7 = 9}$ ebenových kociek**.

Teraz stačí spočítať ostávajúcich ebenových kociek na jednotlivých poschodiach. Dostávame, že **vytunelovaná kocka je teraz zložená z $14 + 4 + 14 + 9 = 41$ ebenových kociek**. Mohlo sa do nej teda schovať až 41 strašidiel.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	2	17	17	7
najmenej sa páčila	24	8	2	7
najťažšia bola	18	11	6	5
najľahšia bola	6	10	13	17