JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2007/08, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,

pomaly sa nám blíži koniec školského roka a prázdniny. Pred nami je už len jedna séria SEZAMu, ktorú si môžete schuti zrátať. Ak sa vám bude aspoň trošku dariť, čaká na vás letný tábor SEZAMu alebo desať dní plných zábavy, hier, matematiky a kamarátov. Tento letný tábor sa uskutoční **od 8. do 17. augusta v Belušských Slatinách** (napriek tomu, že sme vám na zimnom sústredení povedali o zmene miesta). Aby ste sa o tábore dozvedeli ešte viac, prečítajte si spolu s rodičmi priložený list.

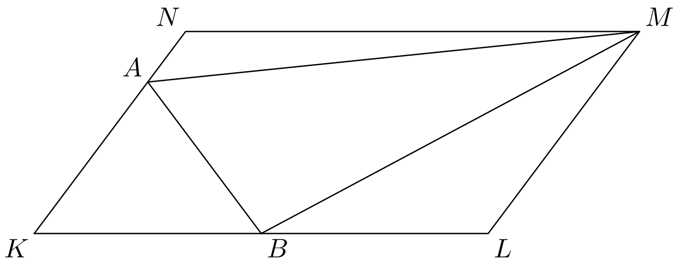
Okrem toho si môžete prečítať aj vzorové riešenia úloh druhej série. Zaslúžite si pochvalu, podľa ankety sa totiž zdá, že sa vám najviac páčili ťažšie úlohy. Ak sa vám ich nepodarilo úplne doriešiť, dozviete sa ako sa dalo pokračovať ďalej. A ak sa vám všetko podarilo, možno sa tu dozviete napríklad iné spôsoby riešenia úloh. . .

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám slnečný máj a veľa úspechov želá Michal Prusák.

1. úloha

(opravoval Jakub Daubner)



Označme si vrcholy rovnobežníka tak ako na obrázku.

Obsahy všetkých štyroch trojuholníkov majú byť rovnaké, preto musí mať každý z nich obsah rovný 1/4 obsahu celého rovnobežníka. Inak povedané $S_{KBA} = S_{BLM} = S_{AMN} = S_{BMA} = 1/4\ S_{KLMN}$.

Všimnime si najskôr trojuholník BLM. Jeho strana LM bude vždy totožná so stranou rovnobežníka. Výška na túto stranu sa však bude meniť podľa toho, kam na stranu KL umiestnime bod B. Ak má mať úloha riešenie, tak výška v trojuholníku BLM na stranu LM musí byť polovičná oproti výške na túto stranu v celom rovnobežníku $KLMN$. Iba vtedy bude platiť $S_{BLM} = 1/4\ S_{KLMN}$. To znamená, že **bod B musí ležať presne v polovici strany KL**. Z rovnakého dôvodu pre trojuholník AMN musí byť **bod A v polovici strany KN**.

Teraz už vieme, že ak má úloha riešenie, tak body A, B musia ležať presne v polovici príslušných strán. Lenže keď ich tam takto umiestnime, tak trojuholník KBA bude mať menší obsah ako má mať. Konkrétne jeho strana KB je polovica z KL a aj výška na túto stranu je polovičná oproti výške v celom rovnobežníku (na stranu KL), takže jeho obsah je $S_{KAB} = 1/8\ S_{KLMN}$. **Týmto sme dokázali, že body A, B sa nedajú umiestniť tak, aby mali všetky záhony rovnaký obsah.**

Komentár k riešeniam: Poslali ste veľa pekných a dobrých riešení. Najčastejšie ste úlohu riešili vyššie uvedeným spôsobom, ale vyskytlo sa aj pár iných riešení. Napríklad ste ukázali, že vždy musí platiť $S_{ABM} > S_{KBA}$ alebo ste ukázali, že vždy musí platiť $S_{KBA} + S_{BLM} < 1/2\ S_{KLMN}$. Najčastejšia chyba bola, že ste zabudli zdôvodniť svoje tvrdenia (a bohužiaľ pár z vás nesprávne pochopilo zadanie).

2. úloha

(opravoval Hynek Bachratý)

Riešení bolo viac, ale najjednoduchšie bolo kúzelníkovi povedať: „Nedáš mi presne 10 libier **a** nedáš mi presne 100 libier.“ **Táto veta je pravdivá, ak sú splnené obe jej časti.** Tým dostaneme spor, lebo za pravdivú vetu mám dostať presne 10 libier, a zároveň podľa prvej časti vety ich nemám dostať.

Zostáva možnosť, že je táto veta nepravdivá. Potom musí platiť je opak, ktorý znie: „Dáš mi presne 10 libier **alebo** mi dáš presne 100 libier.“ **Takáto veta platí, ak je splnená aspoň jedna jej časť.** Ale prvá časť vety nemôže byť splnená, lebo to by mi kúzelník dal za nepravdivú vetu 10 libier, čo odporuje pravidlám. Musí preto splniť druhú časť vety a dať mi 100 libier. Môžeme to skontrolovať. Ak by mi dal napríklad 99 libier, veta by bola očividne pravdivá. Ale to je spor, lebo za pravdivú vetu mám dosť presne 10 libier.

Viacerí úlohu začali riešiť správnou úvahou, že veta určite nemôže byť pravdivá, lebo by som dostal len 10 libier. Teda musí byť nepravdivá a malo by sa v nej spomínať 100 libier. Potom ste začali skúšať a vymysleli okrem tohto riešenia aj iné správne vety: „Dostanem 100 libier práve vtedy, ak je táto veta pravdivá“ alebo „Dáte mi 10 libier práve vtedy, ak mi dáte 100 libier“.

Pri riešení úlohy bolo dôležité, aby ste vedeli vysvetliť, či je vaša veta pravdivá alebo nepravdivá a čo z toho vyplýva. K tomu je dôležité napísať vetu jasne a jednoducho. Problémy boli s komplikovanými vetami a hlavne nejasnými spojkami. Často ste používali „ani“ (to sa ešte dá pochopiť), horšie je to so spojkou „ale“. Čo je presným opakom tvrdenia: „Boli to zaujímavé vety, ale nie za 5 bodov.“?

3. úloha *(opravovala Lenka Trojaková)*

Máme 20 papierikov, na ktorých sú napísané prirodzené čísla od 1 do 20. Našou úlohou je vytvoriť 10 dvojíc, aby tam bolo čo najviac *podarených*. To sú také, že jedno číslo z dvojice delí druhé bezo zvyšku. Tieto dvojice majú byť poskladané na konci na stole. Preto musíme každý papierik (a teda aj každé číslo) použiť práve raz. Ťažko sa budú robiť podarené dvojice s papierikmi, na ktorých je napísané prvočíslo (číslo, ktoré má len dvoch deliteľov). Totiž prvočíslo musí byť buď v podarenej dvojici s jednotkou (ktorú máme len jednu) alebo byť deliteľom väčšieho čísla. Napríklad prvočíslo 5 je deliteľom čísla 15, preto 5 môže byť v podarenej dvojici s 15.

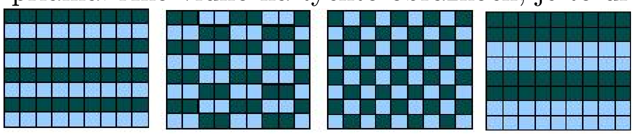
Najväčšie číslo na papierikoch je 20. Preto čísla 11, 13, 17 a 19 môžeme spárovať len s jednotkou. Ich násobky sú väčšie ako 20, preto nemôžu byť v pozícii deliteľa. Vytvoríme napríklad dvojicu $(11, 1)$. Ostali nám tri čísla, ktoré nemôžeme spárovať so žiadnym iným číslom. Chceme mať čo najmenej nepodarených dvojíc, tak dve z týchto čísel spárujeme spolu. Dostaneme jednu nepodarenú dvojicu (napríklad $(13, 17)$) a jedno číslo, s ktorým nevieme vytvoriť podarenú dvojicu. Máme určite aspoň dve nepodarené dvojice $(17, 13)$ a $(19, \text{niečo})$.

Ešte musíme overiť, či vieme popárovať ostatných 15 čísel tak, aby sme dostali sedem podarených dvojíc. Spolu s dvojicou $(11, 1)$ ich budeme mať osem, čo bude maximálny možný počet. Môžeme ich popárovať napríklad takto: $(20, 10)$, $(18, 9)$, $(16, 8)$, $(14, 7)$, $(12, 6)$, $(15, 5)$ a $(4, 2)$. Ostalo nám číslo 3, ktoré dáme do nepodarenej dvojice s 19. **Týmto sme ukázali, že viac ako osem podarených dvojíc urobiť nejde. Takisto sme ukázali, že naozaj tých osem podarených dvojíc vieme urobiť.**

Komentár k riešeniam: Niektorí z vás zle pochopili zadanie a používali papieriky viackrát. Treba pozornejšie čítať, keď je v zadaní napísané, že máme na začiatku 20 papierikov s číslami od 1 do 20, tak každé je tam práve raz. Na konci máme mať na stole tiež 20 papierikov (10 dvojíc). Preto nemôžeme využívať papieriky viackrát.

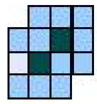
4. úloha *(opravovala Ika Bachratá)*

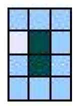
Vždy je ľahšie ukázať, že sa niečo dá, než zdôvodniť, prečo sa niečo nedá. Poďme sa preto pozrieť na sály, ktoré sa dajú vydláždiť podľa Alfrédovho priania. Ako vidno na týchto obrázkoch, je to druhá, tretia, štvrtá a piata sála:



Overte si, že naozaj spĺňajú Alfrédovo prianie. Problém je ale s prvou a šiestou sálou. Tu skúsime ukázať, že naozaj neexistuje žiaden spôsob, ktorým sa dajú vydláždiť.

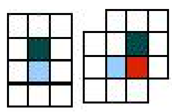
Najprv prvá sála, tu má mať každá dlaždica práve jedného suseda tej istej farby. Zoberme si napríklad jednu čiernu dlaždicu, má mať presne jedného čierneho suseda. Možnosti, ako môžeme tohto suseda priložiť k pôvodnej dlaždici sú dve. Buď sa budú dotýkať hranou alebo vrcholom.





Okolo týchto dvoch čiernych dlaždíc už nemôže byť žiadna ďalšia čierna, lebo obe už majú jedného suseda svojej farby. Všetky dlaždice okolo teda musia byť biele. V obidvoch prípadoch ale nájdeme medzi bielymi dlaždicami v okolí takú bielu dlaždicu, ktorá bude mať **viac ako jedného bieleho suseda**. Podmienka zo zadania sa teda nedá splniť aj pre biele aj pre čierne dlaždice naraz, preto **nevieme vydláždiť prvú sálu**.

Teraz šiesta sála. Tu by sme mohli tiež skontrolovať všetky možnosti rozmiestnenia šiestich dlaždíc rovnakej farby okolo jednej strednej. Možností je tu ale podstatne viac, preto to skúsime inak. Čierna dlaždica, ktorá má šesť čiernych susedov, musí mať dvoch susedov bielych. Preto sa nám určite stane, že niekde v dláždení podlahy budú **čierna a biela dlaždica vedľa seba**. Tieto dve dlaždice sa zase môžu dotýkať buď hranou alebo vrcholom.



Nakreslíme si tieto dva prípady aj so všetkými okolitými dlaždicami. Vidíme, že ak sa čierna a biela dlaždica dotýkajú hranou, majú spolu len desať susedov, ale z desiatich dlaždíc neurobíme šesť bielych a šesť čiernych susedov (na to by sme ich potrebovali dvanásť). Keď sa čierna a biela dlaždica dotýkajú vrcholom, majú okolo seba dvanásť voľných miest, čo by stačilo. Uvedomme si ale, že červenou označená dlaždica musí byť buď biela alebo čierna. **V obidvoch prípadoch budeme mať bielu a čiernu dlaždicu, ktoré sa budú dotýkať hranou.** My sme už ale zistili, že ak nastane takáto situácia, tak sa šiesta sála vydláždiť nebude dať. Preto sa to nedá ani ak sa čierna a biela dlaždica dotýkajú vrcholom. Iná možnosť nastať nemôže, preto sa ani **šiesta sála nedá vydláždiť**.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

úloha č.	1	2	3	4		úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	2	5	3	5		najťažšia bola	3	4	0	6
najmenej sa páčila	6	2	3	3		najľahšia bola	1	1	11	1