JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2010/11, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
zima nám už pomaly mizne a s prichádzajúcou jarou prichádzajú aj zadania druhej série letnej časti SEZAMu. Sme radi, že ste sa popasovali s riešením prvej letnej série. Ešte pred tým, než sa zakusnete do nových príhod panoša Athosa, si určite prečítajte tieto vzorové riešenia. Dozviete sa, ako sa vyvarovať chybám, ktoré ste možno urobili, a ak ste aj žiadnu chybu nespravili, tak sa možno dozviete nové spôsoby riešenia úloh.
Ak máte kamarátov alebo spolužiakov, ktorí by tiež radi riešili SEZAM, skúste im požičať zadania druhej série. Ak budú šikovný, tak aj s dvomi dobre zrátanými sériami sa im môže podariť dobre sa umiestniť a dostať sa na zimné sústredenie. Ďalej vás prosíme aby ste nezabudli so svojimi riešeniami posielať aj spiatočnú obálku s nalepenými známkami a s vypísanou vašou adresou. Taktiež dbajte na poriadne vypisovanie hlavičky ku každému príkladu. Nakoniec by sme vás chceli poprosiť, aby ste si v poradí skontrolovali svoje údaje, ak sú niektoré chybné, napíšte nám a opravíme ich.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

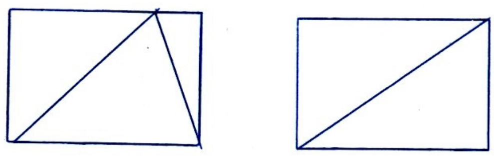
Príklad č. 1 (opravovala Betka Bohiníková)

Na poradu prišli Ronald, Athos, Aramis, Porthos a D'Artagnan. Kráľ ich postavil do kruhu, tak ako je to v zadaní a začal vypočítavať od Aramisa. Povedal celú vypočítavanku, ktorá má 31 slabík, a skončil opäť pri Aramisovi. Ten vypadol a kráľ pokračoval ďalej, no tento krát v opačnom smere. V tomto kole začal od Athosa a vypadol Ronald. V treťom kole začal Porthosom a rovnako ním aj skončil. Zostali už len Athos a D'Artagnan. Keďže sa menil smer odpočítavanie začínal od D'Artagnana a on aj vypadol, teda pri cvičnej vypočítavanke vyhral Athos.
Druhou úlohou v tomto príklade bolo navrhnúť riešenie, ktoré je výhodné pre Athosa. Vidíme, že vyhovuje aj pôvodná vypočítavanka. No taktiež ak porozmýšľame, zistíme, že existuje oveľa viac vhodných vypočítavaniek. Nielen čo sa týka obsahu (niektorí z vás vymysleli v skutku vtipné vypočítavanky ☺) no taktiež z hľadiska počtu slabík. Napríklad všetky vyhovujúce počty slabík menšie ako 20 sú 8, 9, 12, 13, 16 a 17.
Väčšina z vás si s príkladom poradila bez problémov alebo len s menšími chybičkami. Niektorí ste napríklad pozabudolli meniť smer pri odpočítavaní alebo ste zabudli odpovedať na obidve otázky v zadaní.

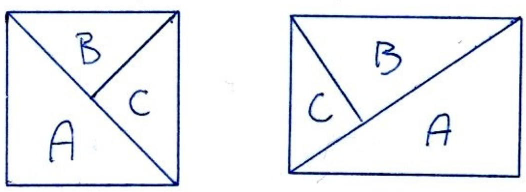
Príklad č. 2 (opravoval Hynek Bachratý)

Tento príklad Vám narobil dosť problémov. Aj pri málo prísnom bodovaní ste tu mnohí niekoľko bodov stratili.
V úlohe sme od vás chceli, aby ste našli spôsoby, ako deliť obdĺžnik na 3 pravouhlé trojuholníky. O obdĺžniku vieme zo zadania len to, že má plochu 50 cm^2, nie jeho rozmery. Tie mohli byť od štvorca až po veľmi „tenké“ pásiky, napríklad 0,1 cm x 500 cm. Bolo preto treba nájsť čo najviac univerzálnych metód delenia a pri každej z nich potom zistiť, či nemôže dať aj zhodné diely.
Ešte pred kreslením sa dala urobiť úvaha o plochách troch trojuholníkov. Spolu musia dať 50 cm^2, a zároveň najväčší z nich je rovnaký ako dva menšie spolu. Z toho sa dá buď úvahou, alebo aj rovnicami zistiť, že najväčší trojuholník má polovicu plochy obdĺžnika, teda 25 cm^2.

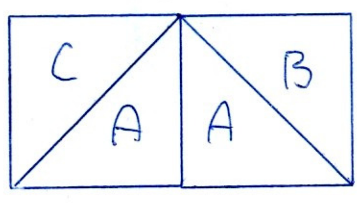
Taký trojuholník sa dá v obdĺžniku urobiť len niekoľkými spôsobmi. K ich odhaleniu pomôže ešte jedna úvaha. Tri vzniknuté pravouhlé trojuholníky majú každý len jeden pravý uhol. Preto jeden zo štyroch pravých uhlov obdĺžnika musí byť rozdelený medzi trojuholníky. Inak povedaná, jedna z deliacich čiar musí vychádzať z vrcholu obdĺžnika. Keď to spojíme s tým, že potrebujeme vytvoriť „polovičný“ trojuholník, dostaneme len dve možnosti, ktoré vidíme na obrázkoch vpravo.



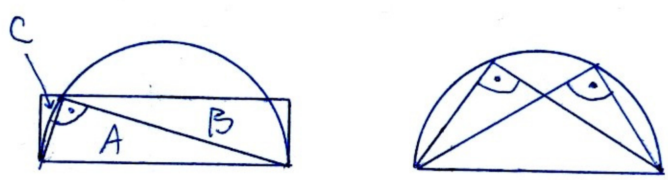
Druhú možnosť pridaním kolmice na uhlopriečku ľahko doplníme na hľadané delenie na tri pravouhlé trojuholníky. Pokiaľ má plát tvar štvorca so stranou odmocnina z 50, dva menšie trojuholníky sú rovnaké. (Niektorých z Vás učia, že štvorec nie je obdĺžnik. Ak ste spomenuli, že len kvôli tomuto sa deliť na rovnaké trojuholníky nedá, uznali sme to ako správne riešenie.)



Prvá možnosť je zložitejšia. Na hornom obrázku je vidieť, že veľký trojuholník má síce polovičný obsah, ale nie je pravouhlý. Veľa z Vás si všimlo a dokázalo, že ak má obdĺžnik rozmery 10x5cm, teda je zložený z dvoch rovnakých štvorcov, delenie cez stred dlhšej strany je správne a dva menšie trojuholníky sú rovnaké. Pravý uhol pri najväčšom trojuholníku ale vieme dostať aj pri iných, od obdĺžnika 10x5 „štíhlejších“ obdĺžnikov. Môžete sa o tom presvedčiť tak, že si nakreslíte obdĺžnik a potom do neho skúsite vložiť roh pravouhlého papiera.



Pre presnú konštrukciu sa dá využiť nasledovná vlastnosť kruhu: ak spojíte konce jeho priemeru s ľubovoľným bodom na obvode, dostanete pravouhlý trojuholník. Táto vlastnosť kruhu je známa pod menom Thalesova veta a vymysleli ju starovekí Gréci, ktorí boli v geometrii naozaj šikovní.



Príklad č. 3 (*opravoval Janči Jakubík*)

Pri riešení tejto úlohy si bolo treba najskôr uvedomiť, čo všetko nám hovorí zadanie. Musia byť použité všetky číslice od 0 po 9 a pritom každá má byť použitá práve raz, čo je dokopy desať cifier. Ďalej musí platiť, že cena koňa (B) musí byť druhou mocninou ceny sedla (A), teda B = A x A .

Všimnime si, že ak medzi sebou vynásobíme dve rovnaké dvojciferné čísla dostaneme výsledok, ktorý bude najmenej trojciferný (10 x 10 = 100) a najviac štvorciferný (99 x 99 = 9801). Ak by teda číslo A bolo dvojciferné, tak potom B bude najviac štvorciferné, takže A a B budú pozostávať z najviac šiestich cifier. Vieme však, že majú pozostávať z desiatich cifier, čo nesedí. Číslo A teda nemôže byť dvojciferné.

Ak medzi sebou vynásobíme dve rovnaké trojciferné čísla, tak dostaneme výsledok, ktorý bude najmenej päťciferný (100 x 100 = 10000) a najviac šesťciferný (999 x 999 = 998001). Ak by teda číslo A bolo trojciferné, tak potom B bude najviac šesťciferné, takže A a B budú pozostávať z najviac deviatich cifier. Vieme však, že majú pozostávať z desiatich cifier, čo nesedí. Číslo A teda nemôže byť ani trojciferné.

Ak medzi sebou vynásobíme dve rovnaké štvorciferné čísla, tak dostaneme výsledok, ktorý bude najmenej sedemciferný (1000 x 1000 = 1000000) a najviac osemciferný (9999 x 9999 = 99980001). Ak by teda číslo A bolo štvorciferné, tak potom B bude najmenej sedemciferné, takže A a B budú pozostávať z najmenej jedenástich cifier. Vieme však, že majú pozostávať z desiatich cifier, čo nesedí. Číslo A teda nemôže byť ani štvorciferné.

Ľahko si uvedomíme, že ak by číslo A malo ešte viac cifier, tak počet cifier čísla B to nezníži, čiže A a B by pozostávali z viac ako desiatich cifier, čo nevyhovuje zadaniu. Pre istotu ešte doplníme, že ak by bolo A jednociferné, tak B bude najviac dvojciferné (9 x 9 = 81), čiže A a B budú pozostávať z najviac troch cifier čo je moc málo.

Zistili sme teda, že neexistujú také prirodzené čísla A a B, ktoré by vyhovovali podmienkam zo zadania, teda úloha nemá riešenie.

Príklad č. 4 (*opravovala Lenka Trojaková*)

Máme tri truhlice s tromi rôznymi nápismi, z ktorých je jeden pravdivý a dva klamú. Ďalej vieme, že niekde v truhliciach sa nachádza brnenie. Dôležitá informácia, na ktorú ste často zabúdali, je, že brnenie môže byť rozdelené do viacerých truhlíc. Označme si truhlice postupne zľava ako "prvá", "druhá" a "tretia".

1. riešenie

Pozrime sa na jednotlivé nápisy. Nápisy na prvej a druhej truhlici hovoria oba o tom, či je poklad v prvej truhlici. Nápis na prvej truhlici hovorí presný opak toho, čo nápis na druhej truhlici. Aby si neprotirečili, musí byť jeden z nich klamstvo a druhý pravdivý (vyskúšajte si to overiť rozobraním jednotlivých možností).

Na tretiu truhlicu nám v každom prípade ostane už len možnosť, že klame, keďže pravdu sme už "minuli" na jednu z truhlíc naľavo od nej. Nápis "Brnenie v tejto truhlici nie je" je teda klamstvo, takže v skutočnosti časť brnenia je určite v tretej truhlici. Otvorením tretej truhlice budeme mať istotu, že nájdeme aspoň časť brnenia. Odporúčame teda otvoriť tretiu truhlicu.

2. riešenie

Príklad sa dal riešiť aj rozoberaním možností pravdivosti jednotlivých výrokov. Označme si klamstvo písmenom K a pravdivé tvrdenie P. Máme tri možnosti: PKK, KPK, KKP

1. PKK Nápis na prvej truhlici je pravdivý, takže časť brnenia je určite v prvej truhlici.

Druhé brnenie klame, takže nie je pravda, že brnenie nie je v ľavej truhlici. Skrátene – brnenie je v ľavej truhlici. Druhé tvrdenie teda len potvrdzuje prvé.

Tretie tvrdenie opäť klame, čiže pravda je, že brnenie je v tretej truhlici.

Brnenie sa teda ukrýva určite v prvej a tretej truhlici. O druhej truhlici nič nevieme povedať, keďže žiadne z tvrdení o nej nič nehovorí. Časť brnenia tam teda byť môže, ale nemusí.

2. KPK Nápis na prvej truhlici klame. Skutočnosť teda je, že v prvej truhlici nič nie je.

Druhé tvrdenie je pravdivé, čo len potvrdzuje to, že prvá truhlica je prázdna.

Tretie tvrdenie klame, teda neplatí, že brnenie nie je v tretej truhlici. Skrátene – brnenie je v tretej truhlici.

Opäť nevieme nič povedať o druhej truhlici.

3. KKP Táto možnosť nemôže nastať, lebo by si tvrdenia na prvej a druhej truhlici odporovali.

Naznačme si do tabuľky výsledky rozoberania možností:

	1. truhlica	2. truhlica	3. trulica
PKK	poklad	?	poklad
KPK	–	?	poklad
KKP	–	–	–

Z tabuľky je ľahko vidieť, že v každom prípustnom prípade bude určite v tretej truhlici aspoň časť brnenia. Odporúčame preto otvoriť tretiu truhlicu.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

Úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	4	3	4	11
najmenej sa páčila	3	9	6	2
najťažšia bola	4	6	8	2
najľahšia bola	8	3	2	8